Fachbereich Mathematik der Universität Stuttgart

Prof. Dr. Bernard Haasdonk
Zahra Askarpour, M. Sc.
Fabio Musco, M. Sc.
Daniel Winkle, M. Sc.

Höhere Mathematik 3 für el

Klausur

Wintersemester 2024/25

Lesen Sie bitte alle Hinweise sorgfältig durch bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.

- Die Klausur besteht aus **6 Aufgaben**. Insgesamt können Sie **40 Punkte** erreichen.
- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt **120 Minuten**.
- Zugelassene Hilfsmittel: Ein DIN A4 Blatt beidseitig **eigenhändig handbeschrieben**, als Hilfsmittel markiert und mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer versehen.
- Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, **sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist**. Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen.
- Eine Lösung kann nur dann gewertet werden, wenn der **Lösungsweg klar erkennbar** ist. **Fehlende Begründungen führen zu Punktabzug.**
- Verwenden Sie zum Lösen **jeder Aufgabe ein separates Blatt**.
- Das Papier wird Ihnen zur Verfügung gestellt.
- Versehen Sie **jedes Blatt** mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Abgaben, die mit einem Bleistift, radierbarer Tinte oder Rotstift geschrieben sind, werden **nicht** gewertet.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen dürfen Sie ohne Weiteres verwenden

$f(x)$	$\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$	$\frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x)$	$\sin(x) - x\cos(x)$	$e^x(x-1)$
$\frac{d}{dx}f(x)$	$\sin^2(x)$	$\sin^3(x)$	$x\sin(x)$	xe^x

Name, Vorname	
Matrikelnummer	

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Σ
Punkte							

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (Differentialgleichungssystem) [2+2 = 4 Punkte].

Sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = Ay \qquad \text{zur Matrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ und Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$ von A.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung y.

Lösung: Die Eigenwerte der Matrix A bestimmen wir aus der charakteristischen Gleichung:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Setzen wir A und das Einheitsmatrix I ein:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Berechnen der Determinanten:

$$(6-\lambda)(6-\lambda) - (-3)(3) = 0,$$
$$(6-\lambda)^2 + 9 = 0,$$
$$\lambda^2 - 12\lambda + 45 = 0.$$

Die Eigenwerte sind die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$\lambda = \frac{12 \pm \sqrt{144-180}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{12 \pm 6\mathrm{i}}{2}.$$

$$\lambda_1 = 6 + 3\mathrm{i}, \quad \lambda_2 = 6 - 3\mathrm{i}. \quad 1$$

Für den Eigenwert $\lambda_1 = 6 + 3\mathrm{i}$ lösen wir:

$$\begin{pmatrix} -3\mathrm{i} & -3 \\ 3 & -3\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Erste Zeile ergibt:

$$-3\mathrm{i}x - 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \mathrm{i}y.$$

Ein Eigenvektor ist dann:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der zweite Eigenvektor ist dann durch das komplexe Konjugat von v_1 gegeben, also

$$v_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad 1$$

Die allgemeine Lösung des Systems lautet mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lautet damit

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{(6+3\mathrm{i}} t v_1 + c_2 \mathrm{e}^{(6-3\mathrm{i}t} v_2. \quad 1$$

Die allgemeine reelle Lösung ist damit gegeben durch

$$y(t) = C_1 \mathrm{e}^{6t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(3t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(3t) \right) + C_2 \mathrm{e}^{6t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(3t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(3t) \right) \quad 1$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (Fourierreihe) [2+2+2 = 6 Punkte].

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2-periodische Fortsetzung der Funktion $g : [0, 2) \to \mathbb{R}$ mit

$$g(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^t - 1 & \text{falls } t \in [0, 1) \\ 1/2(\mathrm{e} - 1) & \text{für } t = 1 \\ 0 & \text{falls } t \in (1, 2). \end{cases}$$

(a) An welchen Stellen t konvergiert die Fourierreihe von f punktweise? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe an diesen Stellen jeweils?

(b) Berechnen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ von f.

(c) Berechnen Sie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$.

Lösung: Die Fourierreihe einer periodischen Funktion konvergiert punktweise an allen Stellen, an denen die Funktion stetig ist. An Unstetigkeitsstellen konvergiert die Fourierreihe nach dem Dirichlet-Kriterium gegen den Mittelwert der links- und rechtsseitigen Grenzwerte:

$$S(t) = \frac{g(t^-) + g(t^+)}{2}, \text{(1)}$$

wobei $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Fourierreihe bezeichnet. Betrachten wir die Unstetigkeitsstellen. Für $t = 1$ haben wir

$$S(1) = \frac{\mathrm{e} - 1}{2}$$

An allen anderen Stellen ist die Funktion stetig, daher konvergiert die Fourierreihe gegen f punktweise. (1)
Die komplexen Fourierkoeffizienten sind gegeben durch

$$c_k = \frac{1}{2} \int_0^2 g(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi t} \, \mathrm{d}t. \text{(1)}$$

Damit ergibt sich in unserem Fall

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\mathrm{e}^t - 1) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi t} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi t} \, \mathrm{d}t - \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi t} \, \mathrm{d}t \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{e}^{1-\mathrm{i}k\pi} - 1}{1 - \mathrm{i}k\pi} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi} - 1}{\mathrm{i}k\pi} \right). \text{(1)} \end{aligned}$$

Nach dem Theorem von Parseval gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |g(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^2 |g(t)|^2 \, \mathrm{d}t. \text{(1)}$$

Damit erhalten wir

$$\int_0^2 |g(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^1 (\mathrm{e}^t - 1)^2 \, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e} + 5}{2}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e} + 5}{5}. \text{(1)}$$

Aufgabe 3 (Fouriertransformation) [7 Punkte].

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t) := \begin{cases} 1 - |t| & \text{falls } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ von f.
Lösung:

Die Fouriertransformierte ist definiert durch

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t. \quad 1$$

In unserem Fall ergibt sich damit

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-1}^{1} (1-|t|)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{1} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

Wir berechnen die Integrale einzeln wir beginnen mit

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{i}}{\omega}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\right). \quad 1$$

Das zweite Integral erhalten wir mithilfe von partieller Integration: 1

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\left[t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{t=-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{\omega^2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{t=-1}^{0} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{\omega^2}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}). \quad 1\end{aligned}$$

Das dritte Integral erhalten wir auch mithilfe von partieller Integration: 1

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\left[t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{t=0}^{1} - \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{\omega^2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{t=0}^{1} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{\omega^2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}-1). \quad 1\end{aligned}$$

Fügen wir nun die Integrale zusammen so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{1} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\right) + \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{\omega^2}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}) - \left(\frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{\omega^2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}-1)\right) \\ &= \frac{2}{\omega^2}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}) \\ &= \frac{2}{\omega^2}(1-\cos(\omega)). \quad 1\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Mehrdimensionale Integration) [2+4+5 = 11 Punkte].

(a) Es bezeichne $D \subset \mathbb{R}^2$ das abgeschlossene Dreieck bestehend aus den Eckpunkten $(-1,0)^T, (0,0)^T$ und $(1,1)^T$. Schreiben Sie D als y-Normalbereich und berechnen Sie $\mathrm{vol}(D)$.

(b) Wir betrachten das Prisma $P := D \times [0,4] \subset \mathbb{R}^3$ und das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) := \mathrm{e}^z(x+y).$$

Berechnen Sie

$$\int_P f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

(c) Die Massendichte $\rho : P \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$\rho(x,y,z) := \begin{cases} 2 & \text{falls} \quad z \geq 3 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechen Sie die Koordinaten x_S und z_S des Schwerpunkts $(x_S, y_S, z_S)^T \in \mathbb{R}^3$ von P.

Lösung: Das Dreieck als y-Normalbereich dargestellt ist gegeben durch

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq < \leq 1, 2y-1 \leq x \leq y\}. \quad 1$$

Das Volumen ist gegeben durch

$$\operatorname{vol}(D) = \int_0^1 \int_{2y-1}^{y} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2}. \quad 1$$

Wir berechnen nun, dass Integral über P:

$$\begin{aligned}
I := \int_P \mathrm{e}^z (x+y) \, \mathrm{d}V &= \int_0^4 \int_0^1 \int_{2y-1}^{y} \mathrm{e}^z (x+y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \quad 1 \\
&= (\mathrm{e}^4 - 1) \int_0^1 \int_{2y-1}^{y} (x+y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= (\mathrm{e}^4 - 1) \int_0^1 \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2}(2y-1)^2 + y(y-2y+1) \, \mathrm{d}y \quad 1 \\
&= (\mathrm{e}^4 - 1) \int_0^1 -\frac{5y^2}{2} - 3y - \frac{1}{2} \, \mathrm{d}y \quad 1 \\
&= \frac{1}{6}(\mathrm{e}^4 - 1). \quad 1
\end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst die Gesamtmasse bevor wir den Schwerpunkt berechnen. Dafür zerteilen wie die Massen in zwei Teile M_1 für $0 \leq z \leq 3$ und M_2 für $3 \leq z \leq 4$.

$$M_1 = \int_0^3 \int_D \mathrm{d}A \, \mathrm{d}z = \operatorname{vol}(D) \cdot 3 = \frac{3}{2}. \quad 1$$

Analog berechnen wir M_2 mit

$$M_2 = \int_3^4 \int_D 2 \, \mathrm{d}A \, \mathrm{d}z = \operatorname{vol}(D) \cdot 2 = 1. \quad 1$$

Zusammengefasst ergibt sich für die Gesamtmasse

$$M = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}.$$

Wir berechnen den Schwerpunkt von P wir stellen zunächst fest

$$x_S = \frac{1}{M} \left[\int_0^3 \int_0^1 \int_{2y-1}^{y} x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + 2 \int_3^4 \int_0^1 \int_{2y-1}^{y} x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \right]. \quad 1$$

Berechnen wir zunächst die inneren Integrale so stellen wir fest

$$\int_0^1 \int_{2y-1}^{y} x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2}(2y-1)^2 \, \mathrm{d}y = \int_0^1 -\frac{3}{2} y^2 + 2y - \frac{1}{2} \, \mathrm{d}y = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 0.$$

Damit gilt insgesamt

$$x_S = 0. \quad 1$$

Nun zu z_S

$$z_S = \frac{1}{M}\left[\int_0^3\int_0^1\int_{2y-1}^{y} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + 2\int_3^4\int_0^1\int_{2y-1}^{y} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right]. \text{(1)}$$

Wir berechnen zunächst

$$\int_{z\leq 3} z\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_0^3 z\,\mathrm{d}z = \frac{9}{4},$$
$$\int_{z>3} 2z\,\mathrm{d}z = \int_3^4 z\,\mathrm{d}z = \frac{7}{2}. \text{(1)}$$

Zusammengefasst erhalten wir damit

$$z_S = \frac{\frac{9}{4}+\frac{7}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{23}{10} = 2.3. \text{(1)}$$

Aufgabe 5 (Integralsätze) [5+2 = 7 Punkte].

(a) Gegeben sei das Vektorfeld $f : G \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x,y,z) := (x^3, y^3, z)^T$$

für $G := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral zweiter Art

$$\int_{\partial G} \langle f, \mathbf{n}\rangle\,\mathrm{d}o.$$

(b) Es sei $D := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+(y+4)^2 \leq 1\}$. Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$v(x,y) := (y, 2x)^T$$

Berechnen Sie $\oint_C \langle v(\mathbf{x}), \mathrm{d}\mathbf{x}\rangle$, wobei C den Rand von D einmal entgegen dem Uhrzeigersinn durchläuft.

Lösung: Nach dem Gaußschen Integralsatz gilt

$$\iint_{\partial G} \langle f, \mathbf{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_G \nabla\cdot f\,\mathrm{d}V. \text{(1)}$$

Die Divergenz ist gegeben durch

$$\nabla\cdot f = 3x^2+3y^2+1. \text{(1)}$$

Da wir

$$\iiint_G 3x^2+3y^2+1\,\mathrm{d}V$$

berechnen wollen, wechseln wir zu Kugelkoordinaten

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi), \quad y = r\sin(\theta)\sin(\varphi), \quad z = r\cos(\theta). \text{(1)}$$

Daher erhalten wir

$$\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} (3r^2\sin^2(\theta)+1)r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^1\int_0^\pi 3r^4\sin(\theta)^3 + r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$$

Die Stammfunktion für $\sin(\theta)^3$ ist auf der ersten Seite zu finden, daher erhalten wir

$$\int_0^\pi \sin^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta \left[\frac{1}{12}\left(\cos(3x)-9\cos(x)\right)\right]_{\theta=0}^{\pi} = \frac{4}{3}. \text{(1)}$$

Außerdem gilt

$$\int_0^{\pi} \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2.$$

Damit erhalten wir

$$\int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (3r^2\sin^2(\theta)+1)r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^1 4r^4 + 2r^2\,\mathrm{d}r = \frac{44\pi}{15}. \text{1}$$

Wir stellen zunächst fest nach dem Geenschen Satz gilt:

$$\oint_C \langle v(\mathbf{x}), \mathrm{d}\mathbf{x}\rangle = \iint_D \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}A.$$

Da $v(x,y) = (y, 2x)$ gilt erhalten wir

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 1. \text{1}$$

Da D ein Kreis mit Radius 1 ist erhalten wir für den Flächeninhalt von D π als Ergebnis. Alles in allem ergibt sich damit

$$\oint_C \langle v(\mathbf{x}), \mathrm{d}\mathbf{x}\rangle = \pi. \text{1}$$

Aufgabe 6 (Partielle Differentialgleichung) [1+4 = 5 Punkte].

(a) Wir betrachten für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die lineare partielle Differentialgleichung mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$au_{xx} + bu_{yy} + cu_x = u.$$

i) Bestimmen Sie für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung elliptisch ist.

ii) Bestimmen Sie für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung hyperbolisch ist.

(b) Geben Sie die Lösung $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ der folgenden Anfangswertprobleme an

i) $u_t + 5u_x = 0, \quad u(x,0) = \sin(x).$

ii) $u_{tt} - 9u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = \cos(x), \quad u_t(x,0) = 1.$

Lösung: Die partielle Differentialgleichung ist elliptischen, falls

$$\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a,b > 0\} \cup \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a,b < 0\}$$

und hyperbolisch, falls

$$\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a > 0,\ b < 0\} \cup \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a < 0,\ b > 0\} \text{1}$$

gilt.
Wir stellen zunächst fest, dass die Gleichung

$$u_t + 5u_x = 0$$

eine Transportgleichung ist. Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch $u(x,t) = f(x - 5t)$. 1.
Mithilfe der Anfangsbedingung erhalten wir

$$u(x,t) = \sin(x - 5t). \text{1}$$

Für

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 0$$

stellen wir fest, dass es sich um eine Wellengleichung mit $c = 3$ handelt. Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+3t) + u_0(x-3t)\right) + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} u_t(s,0)\,\mathrm{s}. \text{ 1}$$

In unserem Fall ergibt sich damit

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\cos(x+3t) + \cos(x-3t) + t. \text{ 1}$$