

Höhere Mathematik 3 für kyb, mecha, phys

Klausur

Wintersemester 2024/25

Lesen Sie bitte alle Hinweise sorgfältig durch bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.

- Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**. Insgesamt können Sie **60 Punkte** erreichen.
- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt **180 Minuten**.
- Zugelassene Hilfsmittel: Ein DIN A4 Blatt beidseitig **eigenhändig handbeschrieben**, als Hilfsmittel markiert und mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer versehen.
- Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, **sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist**. Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen.
- Eine Lösung kann nur dann gewertet werden, wenn der **Lösungsweg klar erkennbar** ist. **Fehlende Begründungen führen zu Punktabzug**.
- Verwenden Sie zum Lösen **jeder Aufgabe ein separates Blatt**.
- Das Papier wird Ihnen zur Verfügung gestellt.
- Versehen Sie **jedes Blatt** mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Abgaben, die mit einem Bleistift, radierbarer Tinte oder Rotstift geschrieben sind, werden **nicht** gewertet.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen dürfen Sie ohne Weiteres verwenden

$f(x)$	$\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$	$\frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x)$	$\sin(x) - x\cos(x)$	$e^x(x - 1)$
$\frac{d}{dx}f(x)$	$\sin^2(x)$	$\sin^3(x)$	$x\sin(x)$	xe^x

Name, Vorname	
Matrikelnummer	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
Punkte										

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (Differentialgleichungssystem) [2+2 = 4 Punkte].

Sei $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = Ay \quad \text{zur Matrix} \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ und Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$ von A .
 (b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung y .

Aufgabe 2 (Fourierreihe) [2+2+2 = 6 Punkte].

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2-periodische Fortsetzung der Funktion $g : [0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(t) := \begin{cases} e^t - 1 & \text{falls } t \in [0, 1) \\ 1/2(e - 1) & \text{für } t = 1 \\ 0 & \text{falls } t \in (1, 2). \end{cases}$$

- (a) An welchen Stellen t konvergiert die Fourierreihe von f punktweise? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe an diesen Stellen jeweils?
 (b) Berechnen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ von f .
 (c) Berechnen Sie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$.

Aufgabe 3 (Fouriertransformation) [7 Punkte].

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t) := \begin{cases} 1 - |t| & \text{falls } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ von f .

Aufgabe 4 (Mehrdimensionale Integration) [2+4+5 = 11 Punkte].

- (a) Es bezeichne $D \subset \mathbb{R}^2$ das abgeschlossene Dreieck bestehend aus den Eckpunkten $(-1, 0)^T$, $(0, 0)^T$ und $(1, 1)^T$. Schreiben Sie D als y -Normalbereich und berechnen Sie $\text{vol}(D)$.
 (b) Wir betrachten das Prisma $P := D \times [0, 4] \subset \mathbb{R}^3$ und das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) := e^z(x + y).$$

Berechnen Sie

$$\int_P f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

- (c) Die Massendichte $\rho : P \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$\rho(x, y, z) := \begin{cases} 2 & \text{falls } z \geq 3 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Koordinaten x_S und z_S des Schwerpunkts $(x_S, y_S, z_S)^T \in \mathbb{R}^3$ von P .

Aufgabe 5 (Integralsätze) [5+2 = 7 Punkte].

- (a) Gegeben sei das Vektorfeld $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x, y, z) := (x^3, y^3, z)^T$$

für $G := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral zweiter Art

$$\int_{\partial G} \langle f, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma.$$

(b) Es sei $D := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y + 4)^2 \leq 1\}$. Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$v(x, y) := (y, 2x)^T$$

Berechnen Sie $\oint_C \langle v(\mathbf{x}), d\mathbf{x} \rangle$, wobei C den Rand von D einmal entgegen dem Uhrzeigersinn durchläuft.

Aufgabe 6 (Partielle Differentialgleichung) [1+4 = 5 Punkte].

(a) Wir betrachten für $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die lineare partielle Differentialgleichung mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$au_{xx} + bu_{yy} + cu_x = u.$$

- i) Bestimmen Sie für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung elliptisch ist.
- ii) Bestimmen Sie für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung hyperbolisch ist.

(b) Geben Sie die Lösung $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ der folgenden Anfangswertprobleme an

- i) $u_t + 5u_x = 0, \quad u(x, 0) = \sin(x).$
- ii) $u_{tt} - 9u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = \cos(x), \quad u_t(x, 0) = 1.$

Aufgabe 7 (Funktionentheorie) [2+3+1 = 6 Punkte].

(a) Bestimmen Sie für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$f_\alpha(x + iy) := (\alpha x)^3 - 3\alpha xy^2 + i(3(\alpha x)^2 y - y^3),$$

komplex differenzierbar ist.

(b) Berechnen Sie folgende Integrale, wobei die Kreisränder mit der Standardparametrisierung, d.h. gegen den Uhrzeigersinn, zu verstehen sind:

- i) $\oint_{\partial B_1(0)} z^{-3} dz$
- ii) $\oint_{\partial B_2(0)} (z^2 + 4z + 3)^{-1} dz$
- iii) $\oint_{\partial B_3(0)} e^{z^2} dz$
- iv) $\oint_{\partial B_4(0)} \frac{\sin(z)}{(z-1)} dz$

(c) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \cos(z)$. Welche Voraussetzung des Satzes von Liouville verletzt die Funktion f .

Aufgabe 8 (Uneigentliches reelles Integral) [1+1+4+3 = 9 Punkte].

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}.$$

- (a) Geben Sie das größtmögliche D an, sodass f wohldefiniert ist.
- (b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe der Ableitung f' von f im Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.
- (c) Bestimmen Sie die Residuen von f in den Polstellen.
- (d) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx.$$

Aufgabe 9 (Differentialgleichung höherer Ordnung) [2+3 = 5 Punkte].

Für $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) + 2y'(t) = (1 + 12t)e^{2t}.$$

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der homogenen Differentialgleichung.
- (b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.