Fachbereich Mathematik der Universität Stuttgart
Prof. Dr. Bernard Haasdonk
Zahra Askarpour, M. Sc.
Fabio Musco, M. Sc.
Daniel Winkle, M. Sc.

Höhere Mathematik 3 für kyb, mecha, phys

Klausur

Wintersemester 2024/25

Lesen Sie bitte alle Hinweise sorgfältig durch bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.

- Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**. Insgesamt können Sie **60 Punkte** erreichen.
- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt **180 Minuten**.
- Zugelassene Hilfsmittel: Ein DIN A4 Blatt beidseitig **eigenhändig handbeschrieben**, als Hilfsmittel markiert und mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer versehen.
- Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, **sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist**. Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen.
- Eine Lösung kann nur dann gewertet werden, wenn der **Lösungsweg klar erkennbar** ist. **Fehlende Begründungen führen zu Punktabzug.**
- Verwenden Sie zum Lösen **jeder Aufgabe ein separates Blatt**.
- Das Papier wird Ihnen zur Verfügung gestellt.
- Versehen Sie **jedes Blatt** mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Abgaben, die mit einem Bleistift, radierbarer Tinte oder Rotstift geschrieben sind, werden **nicht** gewertet.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen dürfen Sie ohne Weiteres verwenden

$f(x)$	$\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$	$\frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x)$	$\sin(x) - x\cos(x)$	$e^x(x-1)$
$\frac{d}{dx}f(x)$	$\sin^2(x)$	$\sin^3(x)$	$x\sin(x)$	xe^x

Name, Vorname	
Matrikelnummer	

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	Σ
Punkte										

Viel Erfolg!

Name, Vorname: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 1 (Differentialgleichungssystem) [2+2 = 4 Punkte].

Sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = Ay \qquad \text{zur Matrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ und Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$ von A.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung y.

Lösung:

(a) Die Eigenwerte der Matrix A bestimmen wir aus der charakteristischen Gleichung:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Setzen wir A und die Einheitsmatrix I ein:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Berechnen der Determinanten:

$$(6-\lambda)(6-\lambda) - (-3)(3) = 0,$$
$$(6-\lambda)^2 + 9 = 0,$$
$$\lambda^2 - 12\lambda + 45 = 0.$$

Die Eigenwerte sind die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$\lambda_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-180}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{12 \pm 6\mathrm{i}}{2}.$$

$$\lambda_1 = 6 + 3\mathrm{i}, \quad \lambda_2 = 6 - 3\mathrm{i}. \; 1$$

Für den Eigenwert $\lambda_1 = 6 + 3\mathrm{i}$ lösen wir:

$$\begin{pmatrix} -3\mathrm{i} & -3 \\ 3 & -3\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Erste Zeile ergibt:

$$-3\mathrm{i}x - 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \mathrm{i}y.$$

Ein Eigenvektor ist dann:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der zweite Eigenvektor ist dann durch das komplexe Konjugat von v_1 gegeben, also

$$v_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}. \; 1$$

(b) Die allgemeine reelle Lösung des Systems lautet mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{(6+3\mathrm{i})t} v_1 + c_2 \mathrm{e}^{(6-3\mathrm{i})t} v_2. \; 1$$

Auch 1 für Fundamentalsystem oder 2, wenn direkt vollständige Lösung dasteht
Fundementalsystem mit $\lambda = \alpha + i\omega, v = a + ib$ (einer der EW + EV):

$$\left\{ e^{\alpha t}(a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t)), e^{\alpha t}\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)) \right\}.$$

Einsetzen liefert

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{6t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(3t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(3t) \right) + c_2 \mathrm{e}^{6t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(3t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(3t) \right). \; 1$$

Aufgabe 2 (Fourierreihe) [2+2+2 = 6 Punkte].

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2-periodische Fortsetzung der Funktion $g : [0, 2) \to \mathbb{R}$ mit

$$g(t) := \begin{cases} e^t - 1 & \text{falls } t \in [0, 1) \\ 1/2(e - 1) & \text{für } t = 1 \\ 0 & \text{falls } t \in (1, 2). \end{cases}$$

(a) An welchen Stellen t konvergiert die Fourierreihe von f punktweise? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe an diesen Stellen jeweils?

(b) Berechnen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ von f.

(c) Berechnen Sie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$.

Lösung:

(a) Die Fourierreihe einer periodischen Funktion konvergiert punktweise an allen Stellen, an denen die Funktion stetig ist. An Unstetigkeitsstellen konvergiert die Fourierreihe nach dem Dirichlet-Kriterium gegen den Mittelwert der links- und rechtsseitigen Grenzwerte:

$$\widehat{g}(t) = \frac{g(t^-) + g(t^+)}{2}. \quad 1$$

Betrachten wir die Unstetigkeitsstellen. Für $t = 1$ haben wir

$$\widehat{g}(1) = \frac{e - 1}{2} = g(1).$$

An allen anderen Stellen ist die Funktion stetig, daher konvergiert die Fourierreihe in allen $t \in \mathbb{R}$ punktweise gegen f. 1

(b) Die komplexen Fourierkoeffizienten sind gegeben durch

$$c_k = \frac{1}{2} \int_0^2 g(t) e^{-ik\pi t} \, dt. \quad 0.5$$

Bei falscher Formel, halben Punkt abziehen und mit FF weiter rechnen
Wahrscheinlich häufige Fälle: Normierung mit $\frac{1}{2\pi}$ und oder Integral bis 2π, wobei die Funktion dann mit Null fortgesetzt wird – hier ebenfalls dann halben Punkt abziehen und mit FF weiter rechnen.
Damit ergibt sich in unserem Fall

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2} \int_0^1 (e^t - 1) e^{-ik\pi t} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 e^t e^{-ik\pi t} \, dt - \int_0^1 e^{-ik\pi t} \, dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{1-ik\pi} - 1}{1 - ik\pi} + \frac{e^{-ik\pi} - 1}{ik\pi} \right), \quad k \neq 0 \quad 1 \end{aligned}$$

und für $k = 0$ gilt

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t - 1 \, dt = \frac{1}{2}((e - 1) - 1) = e/2 - 1. \quad 0.5$$

(c) Nach dem Theorem von Parseval 1 gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |g(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2} \int_0^2 |g(t)|^2 \, dt.$$

Punkt für Parseval auch, wenn Begründung da ist, z.B. Satz aus Vorlesung (ohne Name) oder richtige Formel.
Damit erhalten wir

$$\int_0^2 |g(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^1 (\mathrm{e}^t - 1)^2 \, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e} + 5}{2}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e} + 5}{4}. \text{ 1}$$

Aufgabe 3 (Fouriertransformation) [7 Punkte].

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t) := \begin{cases} 1 - |t| & \text{falls } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ von f.

Lösung:
Die Fouriertransformierte ist definiert durch

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t. \text{ 1}$$

In unserem Fall ergibt sich damit

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-1}^{1} (1 - |t|)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t - \int_{0}^{1} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t. \text{ 1}$$

Wir berechnen die Integrale einzeln wir beginnen mit

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{i}}{\omega} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\right). \text{ 1}$$

Das zweite Integral erhalten wir mithilfe von partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{i}}{\omega} \left[t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{t=-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{i}}{\omega} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{\omega^2} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{t=-1}^{0} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{\omega^2}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}). \text{ 1.5} \end{aligned}$$

Das dritte Integral erhalten wir auch mithilfe von partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int_{0}^{1} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{i}}{\omega} \left[t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{t=0}^{1} - \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{i}}{\omega} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{\omega^2} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{t=0}^{1} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{\omega^2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} - 1). \text{ 1.5} \end{aligned}$$

Die Integrale $\int te^t$ können auch aus einer gegebenen Tabelle abgelesen werden und werden daher auch ohne Rechnung (partieller Integration) voll bepunktet. Wenn aus Tabelle abgelesen wird und die Grenzen falsch eingesetzt, 1 Punkt Abzug und einen halben Punkt für die richtige Stammfunktion geben. Das gilt jeweils für das zweite und dritte Integral.

Fügen wir nun die Integrale zusammen so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{1} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\right) + \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{\omega^2}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}) - \left(\frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{\omega^2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}-1)\right) \\ &= \frac{1}{\omega^2}(2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}) \; 1 \\ &= \frac{2}{\omega^2}(1-\cos(\omega)).\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Mehrdimensionale Integration) [2+4+5 = 11 Punkte].

(a) Es bezeichne $D \subset \mathbb{R}^2$ das abgeschlossene Dreieck bestehend aus den Eckpunkten $(-1,0)^T, (0,0)^T$ und $(1,1)^T$. Schreiben Sie D als y-Normalbereich und berechnen Sie $\mathrm{vol}(D)$.

(b) Wir betrachten das Prisma $P := D \times [0,4] \subset \mathbb{R}^3$ und das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) := \mathrm{e}^z(x+y).$$

Berechnen Sie

$$\int_P f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

(c) Die Massendichte $\rho : P \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$\rho(x,y,z) := \begin{cases} 2 & \text{falls} \quad z \geq 3 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechen Sie die Koordinaten x_S und z_S des Schwerpunkts $(x_S, y_S, z_S)^T \in \mathbb{R}^3$ von P.

Lösung:

(a) Das Dreieck als y-Normalbereich dargestellt ist gegeben durch

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq y \leq 1, 2y-1 \leq x \leq y\}. \; 1$$

Das Volumen ist gegeben durch

$$\mathrm{vol}(D) = \int_0^1 \int_{2y-1}^{y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}. \; 1$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks darf auch über Schulmethoden berechnet werden, also $\frac{1}{2}gh$.

(b) Wir berechnen nun das Integral über P:

$$\begin{aligned} I := \int_P \mathrm{e}^z(x+y)\,\mathrm{d}V &= \int_0^4 \int_0^1 \int_{2y-1}^{y} \mathrm{e}^z(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \; 1 \\ &= (\mathrm{e}^4-1)\int_0^1 \int_{2y-1}^{y} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \; 1 \\ &= (\mathrm{e}^4-1)\int_0^1 \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}(2y-1)^2 + y(y-2y+1)\,\mathrm{d}y \; 1 \\ &= (\mathrm{e}^4-1)\int_0^1 -\frac{5y^2}{2} - 3y - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{6}(\mathrm{e}^4-1). \; 1 \end{aligned}$$

(c) Wir berechnen zunächst die Gesamtmasse bevor wir den Schwerpunkt berechnen. Dafür zerteilen wie die Massen in zwei Teile M_1 für $0 \leq z \leq 3$ und M_2 für $3 \leq z \leq 4$.

$$M_1 = \int_0^3 \int_D \mathrm{d}A\,\mathrm{d}z = \mathrm{vol}(D) \cdot 3 = \frac{3}{2}. \; 0.5$$

Analog berechnen wir M_2 mit

$$M_2 = \int_3^4 \int_D 2\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}z = \mathrm{vol}(D) \cdot 2 = 1. \; 0.5$$

Zusammengefasst ergibt sich für die Gesamtmasse

$$M = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}.$$

Wir berechnen den Schwerpunkt von P wir stellen zunächst fest

$$x_S = \frac{1}{M}\left[\int_0^3 \int_0^1 \int_{2y-1}^{y} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + 2\int_3^4 \int_0^1 \int_{2y-1}^{y} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right]. \; 0.5$$

Berechnen wir zunächst die inneren Integrale so stellen wir fest

$$\int_0^1 \int_{2y-1}^{y} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}(2y-1)^2\,\mathrm{d}y = \int_0^1 -\frac{3}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 0.$$

Damit gilt insgesamt

$$x_S = 0. \; 1$$

Den Punkt für die x Koordinate gibt es auch, wenn man den Schwerpunkt in der Ebene zeichnerisch ermittelt. Einen halben Punkt gibt es für die Aussage + aus Symmetriegründen ist $x_S = 0$ +

Nun zu z_S

$$z_S = \frac{1}{M}\left[\int_0^3 \int_0^1 \int_{2y-1}^{y} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + 2\int_3^4 \int_0^1 \int_{2y-1}^{y} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right]. \; 0.5$$

Wir berechnen zunächst

$$\int_{0\leq z\leq 3} z\,\mathrm{d}V = \int_0^3 z\,\mathrm{d}z \cdot \mathrm{vol}(D) = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4}, \; 0.5$$

$$\int_{3<z\leq 4} 2z\,\mathrm{d}V = \int_3^4 2z\,\mathrm{d}z \cdot \mathrm{vol}(D) = 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}. \; 0.5$$

Zusammengefasst erhalten wir damit

$$z_S = \frac{\frac{9}{4} + \frac{7}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{23}{10} = 2.3. \; 1$$

Aufgabe 5 (Integralsätze) [5+2 = 7 Punkte].

(a) Gegeben sei das Vektorfeld $f : G \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x, y, z) := (x^3, y^3, z)^T$$

für $G := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral zweiter Art

$$\int_{\partial G} \langle f, \mathbf{n} \rangle \,\mathrm{d}o.$$

(b) Es sei $D := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + (y+4)^2 \leq 1\}$. Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$v(x,y) := (y, 2x)^T$$

Berechnen Sie $\oint_C \langle v(\mathbf{x}), \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle$, wobei C den Rand von D einmal entgegen dem Uhrzeigersinn durchläuft.

Lösung:

(a) Nach dem Gaußschen Integralsatz 1 gilt

$$\iint_{\partial G} \langle f, \mathbf{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \iiint_G \nabla \cdot f \,\mathrm{d}V.$$

Punkt für Gauß auch, wenn Begründung da ist, z.B. Satz aus Vorlesung (ohne Name) oder richtige Formel.

Die Divergenz ist gegeben durch

$$\nabla \cdot f = 3x^2 + 3y^2 + 1. \text{ 1}$$

Da wir

$$\iiint_G 3x^2 + 3y^2 + 1 \,\mathrm{d}V$$

berechnen wollen, wechseln wir zu Kugelkoordinaten

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi), \quad y = r\sin(\theta)\sin(\varphi), \quad z = r\cos(\theta).$$

Daher erhalten wir

$$\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (3r^2\sin^2(\theta) + 1) r^2 \sin(\theta) \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}r \text{ 1}$$
$$= 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi 3r^4 \sin(\theta)^3 + r^2\sin(\theta) \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}r \text{ 0.5}$$

Die Stammfunktion für $\sin(\theta)^3$ ist auf der ersten Seite zu finden, daher erhalten wir

$$\int_0^\pi \sin^3(\theta) \,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{12}\left(\cos(3x) - 9\cos(x)\right)\right]_{\theta=0}^{\pi} = \frac{4}{3}. \text{ 0.5}$$

Außerdem gilt

$$\int_0^\pi \sin(\theta) \,\mathrm{d}\theta = 2. \text{ 0.5}$$

Damit erhalten wir

$$\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (3r^2\sin^2(\theta) + 1) r^2 \sin(\theta) \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^1 4r^4 + 2r^2 \,\mathrm{d}r = \frac{44\pi}{15}. \text{ 0.5}$$

(b) Wir stellen zunächst fest nach dem Geenschen Satz 0.5 gilt:

$$\oint_C \langle v(\mathbf{x}), \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle = \iint_D \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}A.$$

Punkt für Green auch, wenn Begründung da ist, z.B. Satz aus Vorlesung (ohne Name) oder richtige Formel.

Da $v(x,y) = (y, 2x)$ gilt erhalten wir

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 1. \text{ 1}$$

Da D ein Kreis mit Radius 1 ist erhalten wir für den Flächeninhalt $\mathrm{vol}(D) = \pi$ als Ergebnis. Alles in allem ergibt sich damit

$$\oint_C \langle v(\mathbf{x}), \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle = \pi. \; 0.5$$

Alternative Lösung ohne Green:

$$\oint_C \langle v(\mathbf{x}), \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle = \int_0^{2\pi} v(C(t))C'(t)\,\mathrm{d}t, \; 1$$

wobei der Weg $C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ gegeben ist durch

$$C(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) - 4 \end{pmatrix} \; 0.5$$

Dann einen halben Punkt 0.5 für das richtige berechnen des entstandenen Integrals.

Aufgabe 6 (Partielle Differentialgleichung) [1+4 = 5 Punkte].

(a) Wir betrachten für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die lineare partielle Differentialgleichung mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$au_{xx} + bu_{yy} + cu_x = u.$$

i) Bestimmen Sie für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung elliptisch ist.

ii) Bestimmen Sie für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung hyperbolisch ist.

(b) Geben Sie die Lösung $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ der folgenden Anfangswertprobleme an

i) $u_t + 5u_x = 0, \quad u(x, 0) = \sin(x).$

ii) $u_{tt} - 9u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = \cos(x), \quad u_t(x, 0) = 1.$

Lösung:

(a) (i) Die partielle Differentialgleichung ist elliptisch, falls

$$\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a, b > 0\} \cup \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a, b < 0\} \; 0.5$$

(ii) Hyperbolisch, falls

$$\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a > 0,\ b < 0\} \cup \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a < 0,\ b > 0\} \; 0.5$$

gilt.

(b) (i) Wir stellen zunächst fest, dass die Gleichung

$$u_t + 5u_x = 0$$

eine Transportgleichung ist. Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch $u(x, t) = u_0(x - 5t)$. 1.

Falls allg. Lösung falsch, aber Transportgleichung erkannt wurde noch 0.5.

Mithilfe der Anfangsbedingung erhalten wir

$$u(x, t) = \sin(x - 5t). \; 1$$

Falls Lösung direkt mit Begründung dasteht (als Begründung reicht Transportgleichung), dann 2.

(ii) Für

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 0$$

stellen wir fest, dass es sich um eine Wellengleichung mit $c = 3$ handelt. Die allgemeine Lösung ist mit der d'Alembert'schen Formel gegeben als

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+3t) + u_0(x-3t)\right) + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} u_t(s,0)\,ds. \text{ 1}$$

Falls allg. Lösung falsch, aber Wellengleichung erkannt wurde noch 0.5.

In unserem Fall ergibt sich damit

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\cos(x+3t) + \cos(x-3t) + t. \text{ 1}$$

Falls Lösung direkt mit Begründung dasteht (als Begründung reicht Wellengleichung oder d'Alembertsche Formel), dann 2.

Aufgabe 7 (Funktionentheorie) [2+3+1 = 6 Punkte].

(a) Bestimmen Sie für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$f_\alpha(x + \mathrm{i}y) := (\alpha x)^3 - 3\alpha x y^2 + \mathrm{i}\left(3(\alpha x)^2 y - y^3\right),$$

komplex differenzierbar ist.

(b) Berechnen Sie folgende Integrale, wobei die Kreisränder mit der Standardparametrisierung, d.h. gegen den Uhrzeigersinn, zu verstehen sind:

i) $\oint_{\partial B_1(0)} z^{-3}\,\mathrm{d}z$

ii) $\oint_{\partial B_2(0)} (z^2 + 4z + 3)^{-1}\,\mathrm{d}z$

iii) $\oint_{\partial B_3(0)} \mathrm{e}^{z^2}\,\mathrm{d}z$

iv) $\oint_{\partial B_4(0)} \frac{\sin(z)}{(z-1)}\,\mathrm{d}z$

(c) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \cos(z)$. Welche Voraussetzung des Satzes von Liouville verletzt die Funktion f.

Lösung:

(a) Wir verwenden Cauchy-Riemann-Gleichungen 1 um das α zu bestimmen, sodass f komplex differenzierbar ist. Wir zerelegen daher f in Real- $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und Imaginärteil $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$u(x,y) := (\alpha x)^3 - 3\alpha x y^2, \quad v(x,y) := 3(\alpha x)^2 y - y^3.$$

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen lauten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Punkt für CR-DGL auch, wenn Begründung da ist, z.B. Satz aus Vorlesung (ohne Name) oder richtige Formeln.

Damit erhalten wir für die Ableitungen

$$u_x = 3\alpha^3 x^2 - 3\alpha y^2, \quad u_y = -6\alpha x y, \quad v_x = 6\alpha^2 x y, \quad v_y = 3(\alpha x)^2 - 3y^2.$$

0.5 wenn alle Ableitungen richtig sind

Damit ergibt sich, dass die Gleichungen genau dann erfüllt sind wenn $\alpha = 1$ gilt. 0.5

(b) (i) Die Funktion $f(z) = z^{-1}$ ist holomorph auf $B_1(0) \setminus \{0\}$. Ferner ist

$$\mathrm{Res}(f, 0) = 0.$$

Damit gilt

$$\oint_{\partial B_1(0)} z^{-3}\,\mathrm{d}z = 0. \; 0.5$$

(Punkt auch ohne Begründung).

(ii) Es gilt

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z+1)(z+3)}, -1\right) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{-2+4} = \frac{1}{2}. \; 0.5$$

Mit dem Rediduensatz gilt

$$\oint_{\partial B_2(0)} (z^2+4z+3)^{-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z+1)(z+3)}, -1\right) = \pi\mathrm{i}. \; 0.5$$

(iii) Es ist

$$\oint_{\partial B_3(0)} \mathrm{e}^{z^2}\,\mathrm{d}z = 0, \; 0.5$$

da die Funktion ganz ist und der Weg geschlossen ist.

(iv) Mithilfe der Cauchy-Integralformel 0.5 stellen wir fest

$$\oint_{\partial B_4(0)} \frac{\sin(z)}{z-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sin(1). \; 0.5$$

Alternative über Residuensatz:
Es ist

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\sin(z)}{z-1}, 1\right) = \sin(1). \; 0.5$$

Dann gilt mit dem Residuensatz

$$\oint_{\partial B_4(0)} \frac{\sin(z)}{z-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{\sin(z)}{z-1}, 1\right) = 2\pi\mathrm{i}\sin(1). \; 0.5$$

(c) Der Satz von Liouville, besagt dass jede **BESCHRÄNKTE** ganze Funktion konstant ist. Die Funktion $\cos(z) = \cosh(\mathrm{i}z)$ ist auf $\mathbb{C}$ unbeschränkt, daher ist der Satz nicht anwendbar. 1

Aufgabe 8 (Uneigentliches reelles Integral) [1+1+4+3 = 9 Punkte].

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{z^4+1}.$$

(a) Geben Sie das größtmögliche D an, sodass f wohldefiniert ist.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe der Ableitung f' von f im Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.

(c) Bestimmen Sie die Residuen von f in den Polstellen.

(d) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung:

(a) Wir stellen fest, damit f wohldefiniert ist muss $z^4 + 1 \neq 0$ gelten. Damit ist $D = \mathbb{C} \setminus \{e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}, e^{i5\pi/4}, e^{i7\pi/4}\}$. 1

(b) Der Konvergenzradius von f ist maximal bis eine Polstelle erreicht wird. Daher ist der Radius $r = 1$. Da f holomorph auf D ist, hat f' denselben Konvergenzradius also auch $r = 1$. 1 Alternative Lösung über geometrische Reihe:
Es ist

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{4k}.$$

Die Reihe konvergiert absolut für $|z| < 1$ und damit gilt für die Ableitung

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 4k z^{4k-1}. \quad 0.5$$

Halben Punkt gibt es auch wenn die Ableitungsreihe falsch aber die Reihe der Funktion f richtig ist.
Damit gilt für den Konvergenzradius $|z| < 1$. 0.5

(c) Wir bestimmen die Residuen von f, also

$$\mathrm{Res}(f, e^{i\pi/4}) = \frac{1}{4} e^{i5\pi/4}, \quad 1$$
$$\mathrm{Res}(f, e^{i3\pi/4}) = \frac{1}{4} e^{i7\pi/4}, \quad 1$$
$$\mathrm{Res}(f, e^{i5\pi/4}) = \frac{1}{4} e^{i\pi/4}, \quad 1$$
$$\mathrm{Res}(f, e^{i7\pi/4}) = \frac{1}{4} e^{i3\pi/4}. \quad 1$$

Alternative Darstellung der Residuen mittel $\frac{1}{4z_k^3}$:

$$\mathrm{Res}(f, e^{i\pi/4}) = \frac{1}{4e^{i3\pi/4}} \quad 1$$
$$\mathrm{Res}(f, e^{i\pi/4}) = \frac{1}{4e^{i9\pi/4}} \quad 1$$
$$\mathrm{Res}(f, e^{i\pi/4}) = \frac{1}{4e^{i15\pi/4}} \quad 1$$
$$\mathrm{Res}(f, e^{i\pi/4}) = \frac{1}{4e^{i21\pi/4}}. \quad 1$$

(d) Da $\sup_{|z|=r, \mathrm{Im}(z)\geq 0} |zf(z)| \to 0$ gilt für $r \to \infty$ bzw. $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomen p, q und $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$ können wir den Residuensatz anwenden. 1 Damit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f, e^{i\pi/4}) + \mathrm{Res}(f, e^{i3\pi/4}) \right) \quad 1$$

Damit erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad 1$$

Aufgabe 9 (Differentialgleichung höherer Ordnung) [2+3 = 5 Punkte].

Für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) + 2y'(t) = (1 + 12t)e^{2t}.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der homogenen Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Lösung:

(a) Wir lösen die homogene Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) + 2y'(t) = 0$$

indem wir den Ansantz

$$y_h(t) = e^{\lambda t} \; 1$$

bzw. alternative über Nullstellen des Char. Polynoms $\lambda^3 + 2\lambda$ 1.
verwenden. Wir erhalten damit

$$e^{\lambda t}(\lambda^3 + 2\lambda) = 0,$$

also $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{2}$. Damit ist die allgemeine reelle homogene Lösung gegeben durch

$$y_h(t) = C_1 + C_2\cos(\sqrt{2}t) + C_3\sin(\sqrt{2}t) \; 1$$

mit $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

(b) Zur Bestimmung der inhomogenen Differentialgleichung machen wir den Ansatz

$$y_p(t) = Ae^{2t} + Bte^{2t}. \; 0.5$$

Die Ableitungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= (2A + B)e^{2t} + 2Bte^{2t}, \; 0.5 \\ y_p''(t) &= (4A + 4B)e^{2t} + 4Bte^{2t}, \\ y_p^{(3)}(t) &= (8A + 12B)e^{2t} + 8Bte^{2t}. \; 0.5 \end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$(8A + 12B)e^{2t} + 8Bte^{2t} + (4A + 2B)e^{2t} + 4Bte^{2t} = e^{2t} + 12te^{2t}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 12A + 14B &= 1 \\ 12Bt &= 12t \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $B = 1$ und $A = -\frac{13}{12}$. 1. Damit ist die gesamte Lösung gegeben durch

$$y(t) = C_1 + C_2\cos(\sqrt{2}t) + C_3\sin(\sqrt{2}t) + te^{2t} - \frac{13}{12}e^{2t}. \; 0.5$$