

Höhere Mathematik 3 für el
Nachklausur
 Sommersemester 2025

Lesen Sie bitte alle Hinweise sorgfältig durch bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.

- Die Klausur besteht aus **6 Aufgaben**. Insgesamt können Sie **40 Punkte** erreichen.
- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt **120 Minuten**.
- Zugelassene Hilfsmittel: Ein DIN A4 Blatt beidseitig **eigenhändig handbeschrieben**, als Hilfsmittel markiert und mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer versehen.
- Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, **sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist**. Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen.
- Eine Lösung kann nur dann gewertet werden, wenn der **Lösungsweg klar erkennbar** ist. **Fehlende Begründungen führen zu Punktabzug**.
- Verwenden Sie zum Lösen **jeder Aufgabe ein separates Blatt**.
- Das Papier wird Ihnen zur Verfügung gestellt.
- Versehen Sie **jedes Blatt** mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Abgaben, die mit einem Bleistift, radierbarer Tinte oder Rotstift geschrieben sind, werden **nicht** gewertet.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen dürfen Sie ohne Weiteres verwenden

$f(x)$	$\frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$	$-\frac{1}{3}\sin^3(x) + \sin(x)$	$e^x(x - 1)$	$\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1)$
$\frac{d}{dx}f(x)$	$\cos^2(x)$	$\cos^3(x)$	xe^x	$x^3e^{x^2}$

Name, Vorname	
Matrikelnummer	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (Differentialgleichungssystem) [2+2 = 4 Punkte].

Sei $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = Ay \quad \text{zur Matrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung.
 (b) Lösen Sie die Differentialgleichung mit Anfangswertdaten $y(0) = (1, 1)^T$.

Lösung:

- (a) A ist in Jordan-Form, also 2 Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

Vorlesung Fall c)

① 0.5 Punkte für die Eigenwerte und 0.5 Punkte für erkennen, dass man eine Jordan-Form hat und damit ein anderes Schema macht. Man bekommt den Punkt auch wenn man Jordan nicht erwähnt aber sonst alles richtig macht.

Eigenvektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch Ablesen.

Nebenvektor w mit $Aw = \lambda w + v$, $w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a + 1b \\ 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 1 \\ 3b \end{pmatrix} \Rightarrow 3a + 1b = 3a + 1 \Rightarrow b = 1, \quad a \text{ kann alles sein}$$

z. B. $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ① Den Punkt gibt es für Eigenvektor und Nebenvektor

Fundamentalsystem:

$$\{e^{\lambda t}v, e^{\lambda t}w + te^{\lambda t}v\}$$

also

$$\left\{ e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + te^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Allg. Lösung also:

$$y(t) = c_0 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 t e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e^{3t} \left(c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ ①}$$

(b) $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow e^{3 \cdot 0} = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 + c_1 + c_1 \cdot 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow c_1 = 1 \quad \text{und} \quad 1 = c_0 + 1 + 0$$

$$\Leftrightarrow c_1 = 1 \quad \text{und} \quad c_0 = 0$$

$$\boxed{y(t) = e^{3t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ ①}}$$

Aufgabe 2 (Fourierreihe) [2+2+1 = 5 Punkte].

Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die direkte 2π -periodische Fortsetzung der Funktion $g: [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(t) := \begin{cases} -1/2 & \text{falls } t = -\pi/2 \\ \sin(t) & \text{falls } t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ 1/2 & \text{falls } t = \pi/2 \\ 0 & \text{falls } t \in [-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

- (a) An welchen Stellen $t \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourierreihe von f punktweise? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe an diesen Stellen jeweils?
- (b) Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ mit $k \in \mathbb{N}$ von f .
Hinweis: Folgendes Additionstheorem könnte hilfreich sein:

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

- (c) Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ von f .

Lösung:

(a)

$$g(t) := \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{falls } t = -\pi/2 \\ \sin(t) & \text{falls } t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ \frac{1}{2} & \text{falls } t = \pi/2 \\ 0 & \text{falls } t \in [-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

Die Fourierreihe einer periodischen Funktion konvergiert punktweise, an allen Stellen, an denen die Funktion stetig ist. An Unstetigkeitsstellen konvergiert die Fourierreihe nach dem Dirichlet-Kriterium gegen den Mittelwert der links und rechtsseitigen Grenzwerte:

$$\hat{g}(t) = \frac{g(t^-) + g(t^+)}{2}$$

Betrachten wir die Unstetigkeitsstellen, erhalten wir für $t_1 = -\pi/2$ und $t_2 = \pi/2$

$$\hat{g}(t_1) = \frac{0 - 1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \hat{g}(t_2) = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2} \quad \textcircled{1}$$

An allen anderen Stellen ist die Funktion stetig, daher konvergiert die Fourierreihe an allen $t \in \mathbb{R}$ punktweise gegen f . $\textcircled{1}$

(b) Für $k \in \mathbb{N}_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt, \quad k \geq 0, \quad T = 2\pi, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(t) \cos(kt) dt = 0. \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

Berechnung der b_k -Koeffizienten:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(kt) dt, \quad k \geq 1, \quad T = 2\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(t) \sin(kt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t-kt) - \cos(t+kt) dt. \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

Wir benötigen eine Fall Unterscheidung für $k = 1$ und $k \neq 1$, wir beginnen mit $k = 1$, damit erhalten wir

$$b_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t-t) - \cos(t+t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 - \cos(2t) dt = \frac{1}{2\pi} \left[t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_{t=-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Für $k \neq 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t-kt) - \cos(t+kt) dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(t-kt)}{1-k} - \frac{\sin(t+kt)}{1+k} \right]_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\pi/2 \cdot (1-k))}{1-k} - \frac{\sin(\pi/2 \cdot (1+k))}{1+k} \right). \quad (1) \end{aligned}$$

(c) Die komplexen Koeffizienten sind gegeben durch:

$$c_0 := \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad k \geq 1 \quad (1)$$

Damit erhalten wir

$$c_0 = 0$$

$$k = 1: \quad c_1 = -i\frac{1}{4}, \quad c_{-1} = i\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} |k| > 1: \quad c_k &= -\frac{i}{\pi} \left(\frac{\sin(\pi/2 \cdot (1-k))}{1-k} - \frac{\sin(\pi/2 \cdot (1+k))}{1+k} \right), \\ c_{-k} &= \frac{i}{\pi} \left(\frac{\sin(\pi/2 \cdot (1-k))}{1-k} - \frac{\sin(\pi/2 \cdot (1+k))}{1+k} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

Man soll Folgefehler beachten, falls $k = 1$ vergessen wir in (b) dann gibt es volle Punkte für die c_k wenn c_1 und c_{-1} nicht dasteht.

Aufgabe 3 (Laplace-Transformation) [4+3=7 Punkte].

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(t) := \begin{cases} 0, & \text{falls } t \in [0, 1], \\ t-1, & \text{falls } t \in (1, \infty). \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie die exponentielle Ordnung $\gamma \in \mathbb{R}$ von f und berechnen Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f)$ von f .
- (b) Es sei $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige beschränkte Funktion. Weiterhin bezeichne $G : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die Stammfunktion von g , das heißt

$$G(t) := \int_0^t g(u) du.$$

Bestimmen Sie die exponentielle Ordnung $\gamma \in \mathbb{R}$ von G und zeigen Sie, dass die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(G)$ von G gegeben ist durch

$$\mathcal{L}(G)(z) = \frac{\mathcal{L}(g)(z)}{z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R} \text{ mit } \operatorname{Re}(z) > \gamma,$$

wobei $\mathcal{L}(g)$ die Laplace-Transformierte von g bezeichnet.

Lösung:

- (a) Für die exponentielle Ordnung stellen betrachten wir

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad (0.5)$$

Wir erhalten für $M = \frac{1}{\gamma}$

$$\frac{1}{\gamma} e^{\gamma t} = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=0}^k \frac{(\gamma t)^j}{j!} \geq \frac{1}{\gamma} + t \geq t - 1 \quad (0.5)$$

auch geben falls die Rechnung für fest gewählte γ , M gemacht worden ist (z.B. $\gamma = M = 1$).Damit ist f von exponentieller Ordnung γ für alle $\gamma > 0$ (0.5) den gibts NUR für alle $\gamma > 0$.Für die Laplace-Transformation erhalten wir für $s > \gamma$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_1^{\infty} (t-1) e^{-st} dt \quad (0.5) \\ &= -\frac{e^{-s}}{s} \quad (0.5) \\ &\quad - \left[\frac{t}{s} e^{-st} \right]_{t=1}^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{e^{-st}}{s} dt \quad (1) \\ &= -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2} = \frac{e^{-s}}{s^2}. \quad (0.5) \end{aligned}$$

- (b)
- g
- is stetig und beschränkt, damit existiert ein
- $C > 0$
- , sodass
- $|g(t)| \leq C$
- für alle
- $t \geq 0$
- . Wir folgern

$$|G(t)| \leq \int_0^t |g(u)| du \leq tC \leq \frac{C}{\gamma} e^{\gamma t} \quad (0.5)$$

für alle $\gamma > 0$ und $t \geq 0$. Damit ist G von exponentieller Ordnung γ für alle $\gamma > 0$. (0.5)Hier Folgefehler falls in (a) und hier mit spezieller Wahl von γ gerechnet wurde.Insbesondere ist G stetig, differenzierbar, $G(0) = 0$ und $G' = g$ damit erhalten wir mit Satz 2.53 aus der Vorlesung. (1) Punkt gibt es auch, wenn nur * in irgendeiner Form begründet ist (Satz aus VL reicht)

$$\mathcal{L}(g)(z) = \mathcal{L}(G')(z) \stackrel{*}{=} z \cdot \mathcal{L}(G)(z) - G(0) = z \cdot \mathcal{L}(G)(z). \quad (1)$$

Also

$$\mathcal{L}(G)(z) = \frac{\mathcal{L}(g)(z)}{z}.$$

Alternativlösung mit partieller Integration und direktem nachrechnen, aber ohne Satz aus der Vorlesung, gibt (2)

Aufgabe 4 (Mehrdimensionale Integration) [3+3+6 = 11 Punkte].

- (a) Es sei $D := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 4, -\sqrt{4-y} \leq x \leq \sqrt{4-y}\}$. Geben Sie D als x -Normalbereich an und berechnen Sie $\text{vol}(D)$.
- (b) Wir betrachten die Menge $K := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ und das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y, z) := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{x^2 + y^2 + z^2}.$$

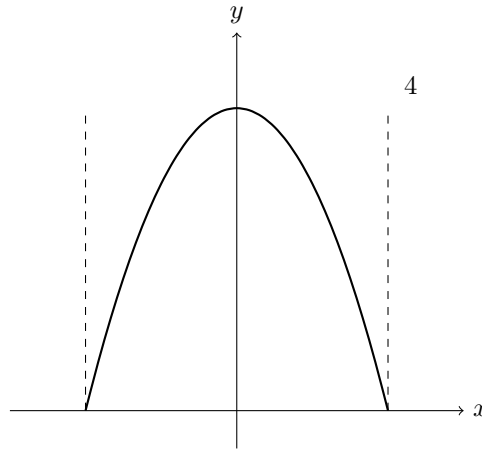
Berechnen Sie

$$\int_K f(x) dx.$$

- (c) Sei $Z := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (x+z)^2 + (y+3z)^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ mit einer konstanten Massendichte von 1 gegeben. Berechnen Sie y_s des Schwerpunkts $(x_s, y_s, z_s)^T \in \mathbb{R}^3$ von Z .

Lösung:

- (a) Wir machen eine Skizze von
- D



und folgern damit $D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2, g(x) \leq y \leq h(x)\}$. (0.5)

Wir bestimmen nun $g(x)$ und $h(x)$. Anhand der Skizze erkennen wir $g(x) = 0$. (0.5) Wir betrachten $x \leq \sqrt{4-y}$ Termumformungen liefern $4 - x^2 \geq y$, damit folgern wir $h(x) = 4 - x^2$. (0.5)

((1.5) wenn Normalbereich direkt richtig dasteht)

Wir berechnen für das Volumen von D

$$\text{Vol}(D) = \iint_D 1 = \int_{-2}^2 h(x) - g(x) dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2 - 0) dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^2 = \frac{32}{3} \quad (0.5)$$

- (b) Wir verwenden Kugelkoordinaten und berechnen

$$\begin{aligned} \int_K f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^3 e^{r^2} \sin(\theta) d\varphi d\theta dr \quad (0.5) \\ &= 4\pi \int_0^2 r^3 e^{r^2} dr. \quad (0.5) \end{aligned}$$

Für das übrig gebliebene Integral verwenden wir nun Integration durch substitution mit $s = r^2$ und erhalten

$$\int_0^2 r^3 e^{r^2} dr = \int_0^4 s^{3/2} e^s \frac{1}{2\sqrt{s}} ds = \frac{1}{2} \int_0^4 s e^s ds. \quad (0.5)$$

Für das übrig gebliebene Integral verwenden wir nun partielle Integration und erhalten

$$\frac{1}{2} \int_0^4 s e^s ds = \frac{1}{2} [s e^s]_{s=0}^4 - \frac{1}{2} [e^s]_{s=0}^4 = \frac{3}{2} e^4 + \frac{1}{2}. \quad (0.5)$$

Alternativ (1) wenn man das Integral $\int r^3 e^{r^2} dr$ einfach vom Deckblatt abliest.

Damit ergibt sich insgesamt für das Integral

$$\int_K f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 2\pi(3e^4 + 1). \quad (1)$$

- (c) Um den Schwerpunkt zu berechnen verwenden wir

$$y_s = \frac{1}{\text{Vol}(Z)} \int_Z y d\mathbf{x}.$$

Wir haben einen schrägen Zylinder, daher verwenden wir die Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\psi) - z \\ r \sin(\psi) - 3z \\ z \end{pmatrix}, \quad r \in [0, 1], \quad \psi \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, 1] \quad (1)$$

Damit ergibt sich

$$\text{Vol}(Z) = \int_Z 1 \, d\mathbf{x} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\psi \, dz = \pi. \quad (0.5)$$

Nun berechnen wir für den Schwerpunkt noch

$$\begin{aligned} \int_Z y \, d\mathbf{x} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \sin(\psi) - 3z) \cdot r \, dz \, d\psi \, dr \quad (1) \text{ Folgefehler beachten} \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin(\psi) \, dz \, d\psi \, dr - 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 z \cdot r \, dz \, d\psi \, dr. \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ergibt sich

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin(\psi) \, dz \, d\psi \, dr = 0$$

und für den übrig gebliebenen Term erhalten wir

$$3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 z \cdot r \, dz \, d\psi \, dr = \frac{3\pi}{2},$$

also ist

$$\int_Z y \, d\mathbf{x} = -\frac{3\pi}{2}.$$

Damit ergibt sich

$$y_s = -\frac{3}{2}. \quad (0.5)$$

Aufgabe 5 (Integralsätze) [5+2 = 7 Punkte].

(a) Gegeben sei das Vektorfeld $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x, y, z) := \left(\frac{1}{4}x^4 + y \cdot e^z, y \cdot \cos^2(x) + z^2x, z \cdot \sin^2(x) + \arctan(y) \right)^T$$

für $G := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, -2 \leq z \leq 2\}$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral zweiter Art

$$\int_{\partial G} \langle f, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma.$$

(b) Es sei $D := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^4 \leq 1, z = 0\}$. Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$v(x, y, z) := (e^x + y + 3x^2y, x + x^3 + y^3 + e^z, ye^z)^T.$$

Berechnen Sie $\oint_C \langle v(x), dx \rangle$, wobei C den Rand von D einmal entgegen dem Uhrzeigersinn durchläuft.

Lösung:

- (a) Wir stellen zunächst fest, dass G ein Zylinder ist und mithilfe des Gaußschen Integralsatzes (1) erhalten wir

$$\int_{\partial G} \langle f, \mathbf{n} \rangle d\sigma = \int_G \operatorname{div} f \, d\mathbf{x}.$$

Punkt für Gauß auch, wenn Begründung da ist, z.B. Satz aus VL (ohne Name) oder richtige Formel.

Wir berechnen $\operatorname{div} f = x^3 + 1$. (1)

Mit Zylinderkoordinaten (d.h. $x = r\cos(\varphi)$) und Funktionaldeterminante r) erhalten wir

$$\int_G (x^3 + 1) \, d\mathbf{x} = \int_{-2}^2 \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^4 \cos^3(\varphi) + r \, d\varphi \, dr \, dz. \quad (1)$$

Wir stellen zunächst fest aufgrund von Symmetrie ergibt sich $\int_0^{2\pi} \cos^3(t) \, dt = 0$. (1) Integral vom Deckblatt ablesen geht auch.

Damit bleibt noch das Integral über r übrig und wir erhalten

$$\int_{-2}^2 \int_0^2 \int_0^{2\pi} r \, d\varphi \, dr \, dz = 16\pi. \quad (1)$$

Falls Funktionaldeterminante vergessen wurde können maximal (4) erreicht werden. Man bekommt aber immernoch das gleiche Endergebnis.

- (b) Mithilfe von Satz von Stokes (1) erhalten wir

$$\oint_C \langle v(x), dx \rangle = \int_D \langle \operatorname{rot} v, n \rangle \, d\mathbf{x}, \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Punkt für Stokes auch, wenn Begründung da ist, z.B. Satz aus VL (ohne Name) oder richtige Formel. Wenn das erfüllt ist und n nicht angegeben oder falsch, geben wir (0.5).

Wir berechnen

$$(\operatorname{rot} v)_3 = \partial_x v_2 - \partial_y v_1 = 1 + 3x^2 - 1 - 3x^2 = 0,$$

also ergibt sich

$$\oint_C \langle v(x), dx \rangle = \int_D \langle \operatorname{rot} v, n \rangle \, d\mathbf{x} = 0. \quad (1)$$

Aufgabe 6 (Partielle Differentialgleichung) [1+4 = 5 Punkte].

Seien $u_1, u_2, u_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen der 1-dimensionalen Wärmeleitungsgleichung, also

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = 0, \quad \text{für } j \in \{1, 2, 3\}. \quad (1)$$

- (a) Zeigen Sie, dass $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$u(x, y, z, t) := u_1(x, t)u_2(y, t)u_3(z, t)$$

eine Lösung der 3-dimensionalen Wärmeleitungsgleichung ist, also

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0.$$

- (b) Berechnen Sie eine Lösung von (1) für $j = 1$ und $u_1(x, 0) = x^2$.

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $u_1(x, t) = v_1(x) + w_1(t)$ mit $w_1(0) = 0$.

(c) Berechnen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, y, z, t) - \Delta u(x, y, z, t) = 0 \quad \text{für } x, y, z \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x, y, z, 0) = x^2 y^2 z^2 \quad \text{für } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Verwenden Sie (a) und (b).

Lösung:

(a) Wir berechnen die notwendigen Ableitungen und erhalten

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(u_1 u_2 u_3)}{\partial t} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) u_2 u_3 + u_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right) u_3 + u_1 u_2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right) \quad (0.5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) u_2 u_3 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_1 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) u_3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u_1 u_2 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \right) \quad (0.5)$$

Punkte hier nur, falls alle Ortsableitungen richtig sind

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) u_2 u_3 + u_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) u_3 + u_1 u_2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \right) \quad (0.5)$$

Da u_j die Wärmeleitungsgleichung lösen erhalten wir

$$= 0 \cdot u_2 u_3 + u_1 \cdot 0 \cdot u_3 + u_1 u_2 \cdot 0 = 0 \quad (0.5)$$

Wir schlussfolgern u löst die 3-dimensionale Wärmeleitungsgleichung.

(b) Wir verwenden den Ansatz aus dem Hinweis und zwar $u_1(t, x) = v_1(x) + w_1(t)$. Betrachten wir die Anfangsbedingung so ergibt sich

$$u_1(0, x) = v_1(x) + w_1(0) = v_1(x) = x^2. \quad (0.5)$$

Wir schlussfolgern damit $v_1(x) = x^2$. (1)

In Kombination mit der Wärmeleitungsgleichung erhalten wir nun

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 2. \quad (1)$$

Wir erhalten als Lösung nun $u_1(t, x) = x^2 + 2t$. (0.5)

(c) Aus (a) wissen wir nun, dass die gesamte Lösung gegeben ist durch

$$u(t, x, y, z) = (x^2 + 2t)(y^2 + 2t)(z^2 + 2t). \quad (1)$$