Fachbereich Mathematik der Universität Stuttgart

Prof. Dr. Bernard Haasdonk
Zahra Askarpour, M. Sc.
Fabio Musco, M. Sc.
Daniel Winkle, M. Sc.

Höhere Mathematik 3 für kyb, mecha, phys

Nachklausur

Sommersemester 2025

Lesen Sie bitte alle Hinweise sorgfältig durch bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.

- Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**. Insgesamt können Sie **60 Punkte** erreichen.
- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt **180 Minuten**.
- Zugelassene Hilfsmittel: Ein DIN A4 Blatt beidseitig **eigenhändig handbeschrieben**, als Hilfsmittel markiert und mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer versehen.
- Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, **sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist**. Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen.
- Eine Lösung kann nur dann gewertet werden, wenn der **Lösungsweg klar erkennbar** ist. **Fehlende Begründungen führen zu Punktabzug.**
- Verwenden Sie zum Lösen **jeder Aufgabe ein separates Blatt**.
- Das Papier wird Ihnen zur Verfügung gestellt.
- Versehen Sie **jedes Blatt** mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Abgaben, die mit einem Bleistift, radierbarer Tinte oder Rotstift geschrieben sind, werden **nicht** gewertet.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen dürfen Sie ohne Weiteres verwenden

$f(x)$	$\frac{1}{2}(x+\sin(x)\cos(x))$	$-\frac{1}{3}\sin^3(x)+\sin(x)$	$e^x(x-1)$	$\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)$
$\frac{d}{dx}f(x)$	$\cos^2(x)$	$\cos^3(x)$	xe^x	$x^3e^{x^2}$

Name, Vorname	
Matrikelnummer	

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	Σ
Punkte										

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (Differentialgleichungssystem) [3+1 = 4 Punkte].

Sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = Ay \qquad \text{zur Matrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung mit Anfangswertdaten $y(0) = (1,1)^T$.

Aufgabe 2 (Fourierreihe) [2+4+2 = 8 Punkte].

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die direkte 2π-periodische Fortsetzung der Funktion $g : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ mit

$$g(t) := \begin{cases} -1/2 & \text{falls } t = -\pi/2 \\ \sin(t) & \text{falls } t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ 1/2 & \text{falls } t = \pi/2 \\ 0 & \text{falls } t \in [-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi). \end{cases}$$

(a) An welchen Stellen $t \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourierreihe von f punktweise? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe an diesen Stellen jeweils?

(b) Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ mit $k \in \mathbb{N}$ von f.
Hinweis: Folgendes Additionstheorem könnte hilfreich sein:

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}.$$

(c) Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ von f.

Aufgabe 3 (Laplace-Transformation) [4+3 = 7 Punkte].

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(t) := \begin{cases} 0, & \text{falls } t \in [0,1] \\ t-1, & \text{falls } t \in (1, \infty). \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die exponentielle Ordnung $\gamma \in \mathbb{R}$ von f und berechnen Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f)$ von f.

(b) Es sei $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige beschränkte Funktion. Weiterhin bezeichne $G : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ die Stammfunktion von g, das heißt

$$G(t) := \int_0^t g(u)\, \mathrm{d}u.$$

Bestimmen Sie die exponentielle Ordnung $\gamma \in \mathbb{R}$ von G und zeigen Sie, dass die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(G)$ von G gegeben ist durch

$$\mathcal{L}(G)(z) = \frac{\mathcal{L}(g)(z)}{z} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{R} \text{ mit } \mathrm{Re}(z) > \gamma,$$

wobei $\mathcal{L}(g)$ die Laplace-Transformierte von g bezeichnet.

Aufgabe 4 (Mehrdimensionale Integration) [2+3+3 = 8 Punkte].

(a) Es sei $D := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le y \le 4,\ -\sqrt{4-y} \le x \le \sqrt{4-y}\}$ geben Sie D als x-Normalbereich an und berechnen Sie $\mathrm{vol}(D)$.

(b) Wir betrachten die Menge $K := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$ und das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y,z) := \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}.$$

Berechnen Sie

$$\int_K f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

(c) Sei $Z := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x+z)^2 + (y+3z)^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq 1\}$ mit einer konstanten Massendichte von 1 gegeben. Berechnen Sie y_s des Schwerpunkts $(x_S, y_S, z_S)^T \in \mathbb{R}^3$ von Z.

Aufgabe 5 (Integralsätze) [5+2 = 7 Punkte].

(a) Gegeben sei das Vektorfeld $f : G \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x,y,z) := \left(\frac{1}{4}x^4 + y\cdot \mathrm{e}^z,\, y\cdot\cos^2(x) + z^2x,\, z\cdot\sin^2(x) + \arctan(y)\right)^T$$

für $G := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq 4, -2 \leq z \leq 2\}$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral zweiter Art

$$\int_{\partial G} \langle f, \mathbf{n}\rangle\,\mathrm{d}o.$$

(b) Es sei $D := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^4 \leq 1,\, z=0\}$. Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$v(x,y,z) := \left(\mathrm{e}^x + y + 3x^2y,\, x + x^3 + y^3 + \mathrm{e}^z,\, y\mathrm{e}^z\right)^T.$$

Berechnen Sie $\oint_C \langle v(\mathbf{x}), \mathrm{d}\mathbf{x}\rangle$, wobei C den Rand von D einmal entgegen dem Uhrzeigersinn durchläuft.

Aufgabe 6 (Partielle Differentialgleichung) [2+3+1 = 6 Punkte].

Seien $u_1, u_2, u_3 : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ Lösungen der 1-dimensionalen Wärmeleitungsgleichung, also

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = 0, \quad \text{für } j \in \{1,2,3\}. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $u(x,y,z,t) := u_1(x,t)u_2(y,t)u_3(z,t)$ eine Lösung der 3-dimensionalen Wärmeleitungsgleichung ist, also

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0.$$

(b) Berechnen Sie eine Lösung von (1) für $j = 1$ und $u_1(x,0) = x^2$.
Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $u_1(x,t) = v_1(x) + w_1(t)$ mit $w_1(0) = 0$.

(c) Berechnen Sie eine Lösung des Anfangwertproblems

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,z,t) - \Delta u(x,y,z,t) &= 0 \qquad &&\text{für } x,y,z \in \mathbb{R}, t > 0\\ u(x,y,z,0) &= x^2y^2z^2 &&\text{für } x,y,z \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie **(a)** und **(b)**.

Aufgabe 7 (Funktionentheorie) [2+3+1 = 6 Punkte].

(a) Bestimmen Sie für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$f_\alpha(x + \mathrm{i}y) := \mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} - \mathrm{e}^{-\alpha y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x},$$

komplex differenzierbar ist.

(b) Gegeben ist die Funktion

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z} + \frac{1}{z^2 - 2(1+\mathrm{i})z + 4\mathrm{i}}.$$

Skizzieren Sie die Konvergenzkreise und lesen Sie daraus die Konvergenzradien bei Potenzreihenentwicklung von f in den folgenden Punkten ab:

i) $a = 1 + 2\mathrm{i}$ ii) $a = 1 - 2\mathrm{i}$.

(c) Im Folgenden bezeichne $\ln : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ wie üblich den Hauptzweig des Logarithmus. Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $\ln(1 + \mathrm{i}) = a + \mathrm{i}b$ gilt.

Aufgabe 8 (Uneigentliches reelles Integral) [2+1+4 = 7 Punkte].

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{z}{(1 + (z+1)^2)^2}.$$

(a) Schreiben Sie das Polynom im Nenner von f als Produkt von Linearfaktoren. Geben Sie das größtmögliche D an, sodass f wohldefiniert ist.

(b) Gegeben sei der Weg

$$C : [0, 1) \to \mathbb{C}, \quad C(t) := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t}$$

Berechnen Sie das Integral $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$.

(c) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1 + (x+1)^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 9 (Differentialgleichung höherer Ordnung) [2+5 = 7 Punkte].

Für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) + y'(t) = \cos(t).$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der homogenen Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.