

Höhere Mathematik 3 für kyb, mecha, phys  
**Nachklausur**  
 Sommersemester 2025

Lesen Sie bitte alle Hinweise sorgfältig durch bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.

- Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**. Insgesamt können Sie **60 Punkte** erreichen.
- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt **180 Minuten**.
- Zugelassene Hilfsmittel: Ein DIN A4 Blatt beidseitig **eigenhändig handbeschrieben**, als Hilfsmittel markiert und mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer versehen.
- Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, **sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist**. Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen.
- Eine Lösung kann nur dann gewertet werden, wenn der **Lösungsweg klar erkennbar** ist. **Fehlende Begründungen führen zu Punktabzug**.
- Verwenden Sie zum Lösen **jeder Aufgabe ein separates Blatt**.
- Das Papier wird Ihnen zur Verfügung gestellt.
- Versehen Sie **jedes Blatt** mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Abgaben, die mit einem Bleistift, radierbarer Tinte oder Rotstift geschrieben sind, werden **nicht** gewertet.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen dürfen Sie ohne Weiteres verwenden

$f(x)$	$\frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$	$-\frac{1}{3}\sin^3(x) + \sin(x)$	$e^x(x - 1)$	$\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1)$
$\frac{d}{dx}f(x)$	$\cos^2(x)$	$\cos^3(x)$	$xe^x$	$x^3e^{x^2}$

<b>Name, Vorname</b>	
<b>Matrikelnummer</b>	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\Sigma$
Punkte										

**Viel Erfolg!**

**Aufgabe 1 (Differentialgleichungssystem)** [3+1 = 4 Punkte].

Sei  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = Ay \quad \text{zur Matrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung  $y$  der Differentialgleichung.  
 (b) Lösen Sie die Differentialgleichung mit Anfangswertdaten  $y(0) = (1, 1)^T$ .

**Lösung:**

- (a)  $A$  ist in Jordan-Form, also 2 Eigenwerte  $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ .

Vorlesung Fall c)

① 0.5 Punkte für die Eigenwerte und 0.5 Punkte für erkennen, dass man eine Jordan-Form hat und damit ein anderes Schema macht. Man bekommt den Punkt auch wenn man Jordan nicht erwähnt aber sonst alles richtig macht.

Eigenvektor  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  durch Ablesen.

Nebenvektor  $w$  mit  $Aw = \lambda w + v$ ,  $w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a + 1b \\ 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 1 \\ 3b \end{pmatrix} \Rightarrow 3a + 1b = 3a + 1 \Rightarrow b = 1, \quad a \text{ kann alles sein}$$

z. B.  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ① Den Punkt gibt es für Eigenvektor und Nebenvektor

Fundamentalsystem:

$$\{e^{\lambda t}v, e^{\lambda t}w + te^{\lambda t}v\}$$

also

$$\left\{ e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + te^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Allg. Lösung also:

$$y(t) = c_0 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 t e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e^{3t} \left( c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ ①}$$

(b)  $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow e^{3 \cdot 0} = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 + c_1 + c_1 \cdot 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow c_1 = 1 \quad \text{und} \quad 1 = c_0 + 1 + 0$$

$$\Leftrightarrow c_1 = 1 \quad \text{und} \quad c_0 = 0$$

$$\boxed{y(t) = e^{3t} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ ①}}$$

**Aufgabe 2 (Fourierreihe)** [2+4+2 = 8 Punkte].

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die direkte  $2\pi$ -periodische Fortsetzung der Funktion  $g : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g(t) := \begin{cases} -1/2 & \text{falls } t = -\pi/2 \\ \sin(t) & \text{falls } t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ 1/2 & \text{falls } t = \pi/2 \\ 0 & \text{falls } t \in [-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

- (a) An welchen Stellen  $t \in \mathbb{R}$  konvergiert die Fourierreihe von  $f$  punktweise? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe an diesen Stellen jeweils?
- (b) Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten  $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$  mit  $k \in \mathbb{N}$  von  $f$ .  
**Hinweis:** Folgendes Additionstheorem könnte hilfreich sein:

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

- (c) Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  von  $f$ .

**Lösung:**

- (a)

$$g(t) := \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{falls } t = -\pi/2 \\ \sin(t) & \text{falls } t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ \frac{1}{2} & \text{falls } t = \pi/2 \\ 0 & \text{falls } t \in [-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

Die Fourierreihe einer periodischen Funktion konvergiert punktweise, an allen Stellen, an denen die Funktion stetig ist. An Unstetigkeitsstellen konvergiert die Fourierreihe nach dem Dirichlet-Kriterium gegen den Mittelwert der links und rechtsseitigen Grenzwerte:

$$\hat{g}(t) = \frac{g(t^-) + g(t^+)}{2}$$

Betrachten wir die Unstetigkeitsstellen, erhalten wir für  $t_1 = -\pi/2$  und  $t_2 = \pi/2$

$$\hat{g}(t_1) = \frac{0 - 1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \hat{g}(t_2) = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2} \quad \textcircled{1}$$

An allen anderen Stellen ist die Funktion stetig, daher konvergiert die Fourierreihe an allen  $t \in \mathbb{R}$  punktweise gegen  $f$ .  $\textcircled{1}$

- (b) Für
- $k \in \mathbb{N}_0$
- erhalten wir

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt, \quad k \geq 0, \quad T = 2\pi, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(t) \cos(kt) dt = 0. \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

**Berechnung der  $b_k$ -Koeffizienten:**

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(kt) dt, \quad k \geq 1, \quad T = 2\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(t) \sin(kt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t-kt) - \cos(t+kt) dt. \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

Wir benötigen eine Fall Unterscheidung für  $k = 1$  und  $k \neq 1$ , wir beginnen mit  $k = 1$ , damit erhalten wir

$$b_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t-t) - \cos(t+t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 - \cos(2t) dt = \frac{1}{2\pi} \left[ t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_{t=-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Für  $k \neq 1$  erhalten wir

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t-kt) - \cos(t+kt) dt = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin(t-kt)}{1-k} - \frac{\sin(t+kt)}{1+k} \right]_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin(\pi/2 \cdot (1-k))}{1-k} - \frac{\sin(\pi/2 \cdot (1+k))}{1+k} \right). \quad (1) \end{aligned}$$

(c) Die komplexen Koeffizienten sind gegeben durch:

$$c_0 := \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad k \geq 1 \quad (1)$$

Damit erhalten wir

$$c_0 = 0$$

$$k = 1: \quad c_1 = -i\frac{1}{4}, \quad c_{-1} = i\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} |k| > 1: \quad c_k &= -\frac{i}{\pi} \left( \frac{\sin(\pi/2 \cdot (1-k))}{1-k} - \frac{\sin(\pi/2 \cdot (1+k))}{1+k} \right), \\ c_{-k} &= \frac{i}{\pi} \left( \frac{\sin(\pi/2 \cdot (1-k))}{1-k} - \frac{\sin(\pi/2 \cdot (1+k))}{1+k} \right). \quad (1) \end{aligned}$$

Man soll Folgefehler beachten, falls  $k = 1$  vergessen wir in (b) dann gibt es volle Punkte für die  $c_k$  wenn  $c_1$  und  $c_{-1}$  nicht dasteht.

### Aufgabe 3 (Laplace-Transformation) [4+3=7 Punkte].

Sei  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(t) := \begin{cases} 0, & \text{falls } t \in [0, 1], \\ t-1, & \text{falls } t \in (1, \infty). \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie die exponentielle Ordnung  $\gamma \in \mathbb{R}$  von  $f$  und berechnen Sie die Laplace-Transformierte  $\mathcal{L}(f)$  von  $f$ .
- (b) Es sei  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige beschränkte Funktion. Weiterhin bezeichne  $G : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  die Stammfunktion von  $g$ , das heißt

$$G(t) := \int_0^t g(u) du.$$

Bestimmen Sie die exponentielle Ordnung  $\gamma \in \mathbb{R}$  von  $G$  und zeigen Sie, dass die Laplace-Transformierte  $\mathcal{L}(G)$  von  $G$  gegeben ist durch

$$\mathcal{L}(G)(z) = \frac{\mathcal{L}(g)(z)}{z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R} \text{ mit } \operatorname{Re}(z) > \gamma,$$

wobei  $\mathcal{L}(g)$  die Laplace-Transformierte von  $g$  bezeichnet.

### Lösung:

- (a) Für die exponentielle Ordnung stellen betrachten wir

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad (0.5)$$

Wir erhalten für  $M = \frac{1}{\gamma}$ 

$$\frac{1}{\gamma} e^{\gamma t} = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=0}^k \frac{(\gamma t)^j}{j!} \geq \frac{1}{\gamma} + t \geq t - 1 \quad (0.5)$$

auch geben falls die Rechnung für fest gewählte  $\gamma$ ,  $M$  gemacht worden ist (z.B.  $\gamma = M = 1$ ).Damit ist  $f$  von exponentieller Ordnung  $\gamma$  für alle  $\gamma > 0$  (0.5) den gibts NUR für alle  $\gamma > 0$ .Für die Laplace-Transformation erhalten wir für  $s > \gamma$ 

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_1^{\infty} (t-1) e^{-st} dt \quad (0.5) \\ &= -\frac{e^{-s}}{s} \quad (0.5) \\ &\quad - \left[ \frac{t}{s} e^{-st} \right]_{t=1}^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{e^{-st}}{s} dt \quad (1) \\ &= -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2} = \frac{e^{-s}}{s^2}. \quad (0.5) \end{aligned}$$

- (b)
- $g$
- is stetig und beschränkt, damit existiert ein
- $C > 0$
- , sodass
- $|g(t)| \leq C$
- für alle
- $t \geq 0$
- . Wir folgern

$$|G(t)| \leq \int_0^t |g(u)| du \leq tC \leq \frac{C}{\gamma} e^{\gamma t} \quad (0.5)$$

für alle  $\gamma > 0$  und  $t \geq 0$ . Damit ist  $G$  von exponentieller Ordnung  $\gamma$  für alle  $\gamma > 0$ . (0.5)Hier Folgefehler falls in (a) und hier mit spezieller Wahl von  $\gamma$  gerechnet wurde.Insbesondere ist  $G$  stetig, differenzierbar,  $G(0) = 0$  und  $G' = g$  damit erhalten wir mit Satz 2.53 aus der Vorlesung. (1) Punkt gibt es auch, wenn nur \* in irgendeiner Form begründet ist (Satz aus VL reicht)

$$\mathcal{L}(g)(z) = \mathcal{L}(G')(z) \stackrel{*}{=} z \cdot \mathcal{L}(G)(z) - G(0) = z \cdot \mathcal{L}(G)(z). \quad (1)$$

Also

$$\mathcal{L}(G)(z) = \frac{\mathcal{L}(g)(z)}{z}.$$

Alternativlösung mit partieller Integration und direktem nachrechnen, aber ohne Satz aus der Vorlesung, gibt (2)

**Aufgabe 4 (Mehrdimensionale Integration)** [2+3+3 = 8 Punkte].

- (a) Es sei
- $D := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 4, -\sqrt{4-y} \leq x \leq \sqrt{4-y}\}$
- . Geben Sie
- $D$
- als
- $x$
- Normalbereich an und berechnen Sie
- $\text{vol}(D)$
- .

- (b) Wir betrachten die Menge
- $K := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$
- und das Skalarfeld
- $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
- , gegeben durch

$$f(x, y, z) := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Berechnen Sie

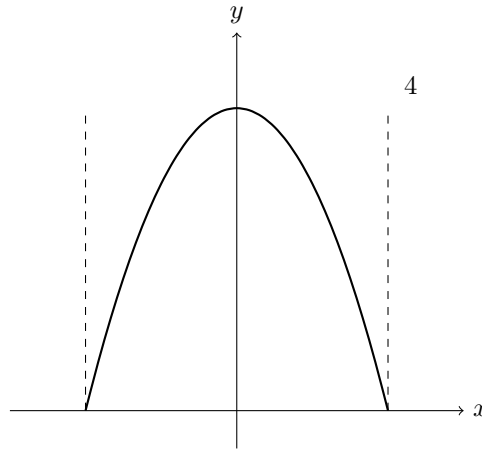
$$\int_K f(x) dx.$$

- (c) Sei
- $Z := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (x+z)^2 + (y+3z)^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$
- mit einer konstanten Massendichte von 1 gegeben.

Berechnen Sie  $y_s$  des Schwerpunkts  $(x_s, y_s, z_s)^T \in \mathbb{R}^3$  von  $Z$ .

## Lösung:

- (a) Wir machen eine Skizze von
- $D$



und folgern damit  $D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ . (0.5)

Wir bestimmen nun  $g(x)$  und  $h(x)$ . Anhand der Skizze erkennen wir  $g(x) = 0$ . (0.5) Wir betrachten  $x \leq \sqrt{4-y}$  Termumformungen liefern  $4 - x^2 \geq y$ , damit folgern wir  $h(x) = 4 - x^2$ . (0.5)

((1.5) wenn Normalbereich direkt richtig dasteht)

Wir berechnen für das Volumen von  $D$

$$\text{Vol}(D) = \iint_D 1 = \int_{-2}^2 h(x) - g(x) dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2 - 0) dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^2 = \frac{32}{3} \quad (0.5)$$

- (b) Wir verwenden Kugelkoordinaten und berechnen

$$\begin{aligned} \int_K f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^3 e^{r^2} \sin(\theta) d\varphi d\theta dr \quad (0.5) \\ &= 4\pi \int_0^2 r^3 e^{r^2} dr. \quad (0.5) \end{aligned}$$

Für das übrig gebliebene Integral verwenden wir nun Integration durch substitution mit  $s = r^2$  und erhalten

$$\int_0^2 r^3 e^{r^2} dr = \int_0^4 s^{3/2} e^s \frac{1}{2\sqrt{s}} ds = \frac{1}{2} \int_0^4 s e^s ds. \quad (0.5)$$

Für das übrig gebliebene Integral verwenden wir nun partielle Integration und erhalten

$$\frac{1}{2} \int_0^4 s e^s ds = \frac{1}{2} [s e^s]_{s=0}^4 - \frac{1}{2} [e^s]_{s=0}^4 = \frac{3}{2} e^4 + \frac{1}{2}. \quad (0.5)$$

Alternativ (1) wenn man das Integral  $\int r^3 e^{r^2} dr$  einfach vom Deckblatt abliest.

Damit ergibt sich insgesamt für das Integral

$$\int_K f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 2\pi(3e^4 + 1). \quad (1)$$

- (c) Um den Schwerpunkt zu berechnen verwenden wir

$$y_s = \frac{1}{\text{Vol}(Z)} \int_Z y d\mathbf{x}.$$

Wir haben einen schrägen Zylinder, daher verwenden wir die Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\psi) - z \\ r \sin(\psi) - 3z \\ z \end{pmatrix}, \quad r \in [0, 1], \quad \psi \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, 1] \quad (1)$$

Damit ergibt sich

$$\text{Vol}(Z) = \int_Z 1 \, d\mathbf{x} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\psi \, dz = \pi. \quad (0.5)$$

Nun berechnen wir für den Schwerpunkt noch

$$\begin{aligned} \int_Z y \, d\mathbf{x} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \sin(\psi) - 3z) \cdot r \, dz \, d\psi \, dr \quad (1) \text{ Folgefehler beachten} \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin(\psi) \, dz \, d\psi \, dr - 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 z \cdot r \, dz \, d\psi \, dr. \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ergibt sich

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin(\psi) \, dz \, d\psi \, dr = 0$$

und für den übrig gebliebenen Term erhalten wir

$$3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 z \cdot r \, dz \, d\psi \, dr = \frac{3\pi}{2},$$

also ist

$$\int_Z y \, d\mathbf{x} = -\frac{3\pi}{2}.$$

Damit ergibt sich

$$y_s = -\frac{3}{2}. \quad (0.5)$$

### Aufgabe 5 (Integralsätze) [5+2 = 7 Punkte].

(a) Gegeben sei das Vektorfeld  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch

$$f(x, y, z) := \left( \frac{1}{4}x^4 + y \cdot e^z, y \cdot \cos^2(x) + z^2x, z \cdot \sin^2(x) + \arctan(y) \right)^T$$

für  $G := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, -2 \leq z \leq 2\}$ . Berechnen Sie das Oberflächenintegral zweiter Art

$$\int_{\partial G} \langle f, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma.$$

(b) Es sei  $D := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^4 \leq 1, z = 0\}$ . Das Vektorfeld  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei definiert durch

$$v(x, y, z) := (e^x + y + 3x^2y, x + x^3 + y^3 + e^z, ye^z)^T.$$

Berechnen Sie  $\oint_C \langle v(x), dx \rangle$ , wobei  $C$  den Rand von  $D$  einmal entgegen dem Uhrzeigersinn durchläuft.

### Lösung:

- (a) Wir stellen zunächst fest, dass  $G$  ein Zylinder ist und mithilfe des Gaußschen Integralsatzes (1) erhalten wir

$$\int_{\partial G} \langle f, \mathbf{n} \rangle d\sigma = \int_G \operatorname{div} f \, d\mathbf{x}.$$

Punkt für Gauß auch, wenn Begründung da ist, z.B. Satz aus VL (ohne Name) oder richtige Formel.

Wir berechnen  $\operatorname{div} f = x^3 + 1$ . (1)

Mit Zylinderkoordinaten (d.h.  $x = r\cos(\varphi)$ ) und Funktionaldeterminante  $r$ ) erhalten wir

$$\int_G (x^3 + 1) \, d\mathbf{x} = \int_{-2}^2 \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^4 \cos^3(\varphi) + r \, d\varphi \, dr \, dz. \quad (1)$$

Wir stellen zunächst fest aufgrund von Symmetrie ergibt sich  $\int_0^{2\pi} \cos^3(t) \, dt = 0$ . (1) Integral vom Deckblatt ablesen geht auch.

Damit bleibt noch das Integral über  $r$  übrig und wir erhalten

$$\int_{-2}^2 \int_0^2 \int_0^{2\pi} r \, d\varphi \, dr \, dz = 16\pi. \quad (1)$$

Falls Funktionaldeterminante vergessen wurde können maximal (4) erreicht werden. Man bekommt aber immernoch das gleiche Endergebnis.

- (b) Mithilfe von Satz von Stokes (1) erhalten wir

$$\oint_C \langle v(x), dx \rangle = \int_D \langle \operatorname{rot} v, n \rangle \, d\mathbf{x}, \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Punkt für Stokes auch, wenn Begründung da ist, z.B. Satz aus VL (ohne Name) oder richtige Formel. Wenn das erfüllt ist und  $n$  nicht angegeben oder falsch, geben wir (0.5).

Wir berechnen

$$(\operatorname{rot} v)_3 = \partial_x v_2 - \partial_y v_1 = 1 + 3x^2 - 1 - 3x^2 = 0,$$

also ergibt sich

$$\oint_C \langle v(x), dx \rangle = \int_D \langle \operatorname{rot} v, n \rangle \, d\mathbf{x} = 0. \quad (1)$$

### Aufgabe 6 (Partielle Differentialgleichung) [2+3+1 = 6 Punkte].

Seien  $u_1, u_2, u_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  Lösungen der 1-dimensionalen Wärmeleitungsgleichung, also

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = 0, \quad \text{für } j \in \{1, 2, 3\}. \quad (1)$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$u(x, y, z, t) := u_1(x, t)u_2(y, t)u_3(z, t)$$

eine Lösung der 3-dimensionalen Wärmeleitungsgleichung ist, also

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0.$$

- (b) Berechnen Sie eine Lösung von (1) für  $j = 1$  und  $u_1(x, 0) = x^2$ .

**Hinweis:** Verwenden Sie den Ansatz  $u_1(x, t) = v_1(x) + w_1(t)$  mit  $w_1(0) = 0$ .

- (c) Berechnen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, y, z, t) - \Delta u(x, y, z, t) = 0 \quad \text{für } x, y, z \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x, y, z, 0) = x^2 y^2 z^2 \quad \text{für } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

**Hinweis:** Verwenden Sie (a) und (b).**Lösung:**

- (a) Wir berechnen die notwendigen Ableitungen und erhalten

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(u_1 u_2 u_3)}{\partial t} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) u_2 u_3 + u_1 \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} \right) u_3 + u_1 u_2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) \quad (0.5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) u_2 u_3 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_1 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) u_3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u_1 u_2 \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \right) \quad (0.5)$$

Punkte hier nur, falls alle Ortsableitungen richtig sind

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) u_2 u_3 + u_1 \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) u_3 + u_1 u_2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \right) \quad (0.5)$$

Da  $u_j$  die Wärmeleitungsgleichung lösen erhalten wir

$$= 0 \cdot u_2 u_3 + u_1 \cdot 0 \cdot u_3 + u_1 u_2 \cdot 0 = 0 \quad (0.5)$$

Wir schlussfolgern  $u$  löst die 3-dimensionale Wärmeleitungsgleichung.

- (b) Wir verwenden den Ansatz aus dem Hinweis und zwar
- $u_1(t, x) = v_1(x) + w_1(t)$
- . Betrachten wir die Anfangsbedingung so ergibt sich

$$u_1(0, x) = v_1(x) + w_1(0) = v_1(x) = x^2. \quad (0.5)$$

Wir schlussfolgern damit  $v_1(x) = x^2$ . (1)

In Kombination mit der Wärmeleitungsgleichung erhalten wir nun

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 2. \quad (1)$$

Wir erhalten als Lösung nun  $u_1(t, x) = x^2 + 2t$ . (0.5)

- (c) Aus (a) wissen wir nun, dass die gesamte Lösung gegeben ist durch

$$u(t, x, y, z) = (x^2 + 2t)(y^2 + 2t)(z^2 + 2t). \quad (1)$$

**Aufgabe 7 (Funktionentheorie)** [2+3+1 = 6 Punkte].

- (a) Bestimmen Sie für welche
- $\alpha \in \mathbb{R}$
- die Funktion
- $f_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
- , definiert durch

$$f_\alpha(x + iy) := e^{-y} e^{i\alpha x} - e^{-\alpha y} e^{ix},$$

komplex differenzierbar ist.

- (b) Gegeben ist die Funktion

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z} + \frac{1}{z^2 - 2(1+i)z + 4i}.$$

Skizzieren Sie die Konvergenzkreise und lesen Sie daraus die Konvergenzradien bei Potenzreihenentwicklung von  $f$  in den folgenden Punkten ab:

(i)  $a = 1 + 2i$

(ii)  $a = 1 - 2i$

- (c) Im Folgenden bezeichne
- $\ln : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$
- wie üblich den Hauptzweig des Logarithmus. Bestimmen Sie
- $a, b \in \mathbb{R}$
- , sodass
- $\ln(1 + i) = a + ib$
- gilt.

**Lösung:**

- (a) Es ist

$$\begin{aligned} f_\alpha(x + iy) &= e^{-y}(\cos(\alpha x) + i\sin(\alpha x)) - e^{-\alpha y}(\cos(x) + i\sin(x)) \\ &= e^{-y}\cos(\alpha x) - e^{-\alpha y}\cos(x) + i(e^{-y}\sin(\alpha x) - e^{-\alpha y}\sin(x)) \\ &=: u(x, y) + iv(x, y). \end{aligned} \quad (0.5)$$

Wir verwenden die Cauchy-Riemann-Gleichungen (0.5) um das  $\alpha$  so zu bestimmen, dass  $f$  komplex diffbar ist.

Punkt für CR-DGL auch, wenn Begründung da ist, z.B. Satz aus VL (ohne Name) oder richtige Formeln.

Wir erhalten die folgenden Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\alpha e^{-y}\sin(\alpha x) + e^{-\alpha y}\sin(x), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^{-y}\cos(\alpha x) + \alpha e^{-\alpha y}\sin(x), \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \alpha e^{-y}\cos(\alpha x) - e^{-\alpha y}\cos(x), \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -e^{-y}\sin(\alpha x) + \alpha e^{-\alpha y}\sin(x). \end{aligned}$$

(0.5) wenn alle Ableitungen richtig sind.

Einsetzen in die Gleichung liefert

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \alpha = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \alpha = 1.$$

Also insgesamt  $\alpha = 1$ . (0.5)

Alternativ Wir verwenden die Cauchy-Riemann DGL (0.5) und überprüfen ob  $\partial_x f_\alpha = i\partial_y f_\alpha$ , wir berechnen

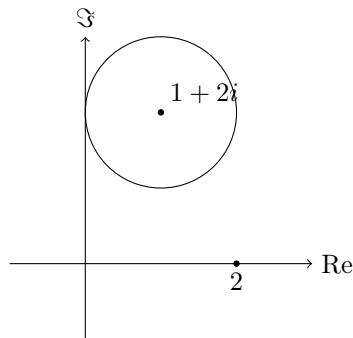
$$\partial_x f_\alpha = e^{-y}e^{i\alpha x}(i\alpha) - e^{-\alpha y}e^{ix}i \quad (0.5)$$

$$i\partial_y f_\alpha = -ie^{-y}e^{i\alpha x} + ie^{-\alpha y}e^{ix}\alpha, \quad (0.5)$$

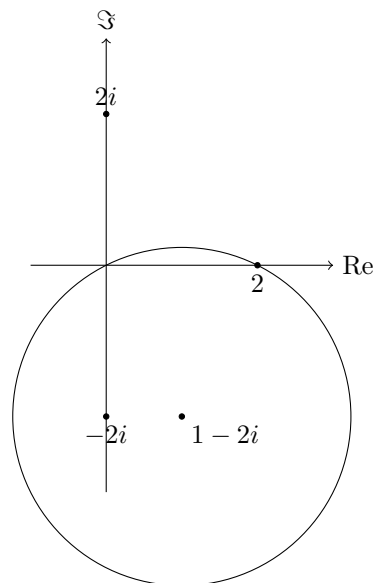
damit erhalten wir nun  $\alpha = 1$ . (0.5)

- (b) Wir berechnen zunächst einmal die Pole  $\cos(z)/z$  liefert ein Pol in  $z_0 = 0$  (0.5). Wir berechnen die Nullstellen von  $z^2 - 2(1 + i)z + 4i$  und erhalten  $z_{1,2} = 1 + i \pm (1 - i)$ , also  $z_1 = 2$  und  $z_2 = 2i$ . (0.5)  
Nun zu den Skizzen

- (i) Für  $a = 1 + 2i$  erhalten wir, dass  $2i$  der nächste Pol ist damit hat der Konvergenzradius  $1$  (0.5) **Konvergenzbereich:**  $B_1(1 + 2i)$



(0.5)

(ii) Für  $a = 1 - 2i$  erhalten wir, dass 2 der nächste Pol ist damit hat der Konvergenzkreis Radius $\sqrt{5}$  (0.5)

(0.5)

(c) Wir berechnen  $\ln(1+i) = \ln(\sqrt{2}e^{i\pi/4}) = \frac{1}{2} \ln(2) + i\frac{\pi}{4}$ . (1)**Aufgabe 8 (Uneigentliches reelles Integral)** [2+1+4 = 7 Punkte].Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$f(z) = \frac{z}{(1+(z+1)^2)^2}.$$

(a) Schreiben Sie das Polynom im Nenner von  $f$  als Produkt von Linearfaktoren. Geben Sie das größtmögliche  $D$  an, sodass  $f$  wohldefiniert ist.

(b) Gegeben sei der Weg

$$C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad C(t) := e^{2\pi it}$$

Berechnen Sie das Integral  $\int_C f(z) dz$ .

(c) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+(x+1)^2)^2} dx.$$

**Lösung:**

- (a) Wir betrachten  $(1 + (z + 1)^2)^2 = (2 + 2z + z^2)^2$  die Nullstellen berechnen wir mithilfe der Mitternachtsformel und die sind damit

$$z_{1,2} = -1 \pm i. \quad (0.5)$$

Damit gilt  $(1 + (z + 1)^2)^2 = (z - i + 1)^2(z + i + 1)^2$  (0.5) und der maximale Definitionsbereich von  $f$  ist gegeben durch

$$D = \mathbb{C} \setminus \{-1 \pm i\}. \quad (1)$$

- (b) Wir beachten, dass der Weg den Einheitskreis umkreist, und  $|z_{1,2}| > 1$  (0.5), damit ist  $f$  innerhalb des Einheitskreises Holomorph und wir erhalten

$$\int_C f(z) dz = 0. \quad (0.5)$$

- (c) Das Polynom im Nenner hat Grad 4 und das Polynom im Zähler hat Grad 1 und  $4 > 1 + 2$  (0.5), damit können wir den Satz aus der Vorlesung verwenden und erhalten (0.5) diesen halben Punkt gibt es, wenn ausreichend begründet wird, z.B. Name Residuensatz (oder Satz aus VL) oder die allgemeine Formel dasteht, diesen halben Punkt gibt es nicht, wenn direkt wie unten eingesetzt wird

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1 + (1 + x)^2)^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1 + i) \quad (1)$$

Wir berechnen, das Residuum in  $z_1$ , beachte wir haben einen Pol zweiter Ordnung. Die zugehörige Regel aus der Vorlesung ist gegeben durch

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{(z - a)^{m+1}}, a\right) = \frac{g^{(m)}(a)}{m!}.$$

Es gilt dann mit der Definition  $g(z) = (z + 1 - i)^2 f(z)$  und  $g'(z) = \frac{-z+1+i}{(z+1+i)^3}$  (0.5)

$$\operatorname{Res}(f, -1 + i) = \operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{(z + 1 - i)^2}, -1 + i\right) = g'(-1 + i) = \frac{i}{4}. \quad (1)$$

Alternativ

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, -1 + i) &= \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{\partial}{\partial z} ((z + 1 - i)^2 f(z)) = \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{(z + 1 + i)^2} = \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{-z + 1 + i}{(z + 1 + i)^3} \quad (0.5) \\ &= \frac{2}{-8i} = \frac{i}{4}. \quad (1) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1 + (1 + x)^2)^2} dx = -\frac{\pi}{2}. \quad (0.5)$$

### Aufgabe 9 (Differentialgleichung höherer Ordnung) [2+5 = 7 Punkte].

Für  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten wir die Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) + y'(t) = \cos(t).$$

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der homogenen Differentialgleichung.  
 (b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

**Lösung:**

- (a) Wir stellen das charakteristische Polynom auf, also erhalten wir

$$\lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 1) = 0.$$

Damit erhalten wir  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_{2,3} = \pm i$ . (1) Die allgemeine reelle Lösung des homogenen Problems ist damit gegeben durch

$$y_h(t) = c_1 + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t), \quad (1)$$

für  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ .

- (b) Wir machen den Ansatz
- $y_p(t) = A t \sin(t) + B t \cos(t)$
- (1) und berechnen die Ableitungen

$$y_p'(t) = A(\sin(t) + t \cos(t)) + B(\cos(t) - t \sin(t)), \quad (0.5)$$

$$y_p''(t) = A(2 \cos(t) - t \sin(t)) - B(2 \sin(t) + t \cos(t)),$$

$$y_p'''(t) = -A(3 \sin(t) + t \cos(t)) - B(3 \cos(t) - t \sin(t)). \quad (0.5)$$

Einsetzen liefert nun

$$-A(3 \sin(t) + t \cos(t)) - B(3 \cos(t) - t \sin(t)) + A(\sin(t) + t \cos(t)) + B(\cos(t) - t \sin(t)) = \cos(t)$$

$$\Leftrightarrow A \sin(t) - 2B \cos(t) = \cos(t) \quad (1)$$

damit folgt  $A = 0$  und  $B = -\frac{1}{2}$ . (1)

Die allgemeine reelle Lösung ist damit gegeben durch

$$y(t) = c_1 + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t) - \frac{t}{2} \cos(t). \quad (1)$$