

Modulprüfung (Module 41990 und 107730)
mit Lösungen
11.03.2026

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten. Es ist erlaubt, die Seiten auf einem Tablet handschriftlich zu schreiben und sie dann auszudrucken. Insbesondere sind keine Taschenrechner, Handys oder Smartwatches erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unzulässig und werden ggfs. nicht berücksichtigt.
- Es gibt insgesamt **9 Aufgaben**.
- Es sind insgesamt **40 Punkte** erreichbar.
- Die Antworten müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden. Schreiben Sie nicht auf den Umschlagsbogen!
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite und kennzeichnen Sie die Aufgabenteile klar.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 + 1 + 2 + 1 Punkte). Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem in 4 Variablen:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_4 = 5. \end{cases}$$

- (a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

- (b) Überprüfen Sie, ob der Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems darstellt.

- (c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des angegebenen linearen Gleichungssystems mit Hilfe des gaußschen Eliminationsverfahrens.

- (d) Bestimmen Sie den Rang von A .

Lösung. (a) Die Koeffizientenmatrix und der Vektor $\mathbf{b}$ sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- (b) Es gilt

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{b}.$$

Damit ist $\mathbf{x}$ keine Lösung.

- (c) Wir bringen die erweiterte Koeffizientenmatrix in reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -10 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \mathbf{z}_2 - 2\mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_3 - 3\mathbf{z}_1 \end{array} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array} \right) -\frac{1}{5}\mathbf{z}_3 \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \mathbf{z}_1 - 2\mathbf{z}_3 \\ \mathbf{z}_2 + 4\mathbf{z}_3 \\ \end{array} \end{aligned}$$

Aus der reduzierten Zeilenstufenform folgt: x_1, x_2, x_4 sind Basiskordinaten, x_3 ist frei. Setze $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3 + t, \quad x_4 = 2.$$

Also ist die Lösungsmenge

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3+t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(d) Der Rang von A ist gleich 3, denn die Zeilenstufenform hat 3 Pivots.

□

Aufgabe 2 (1 + 2 + 1 + 1 Punkte). Betrachten Sie die folgende Funktion, die von dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \frac{1 - \cos(2x)}{x} & \text{für } x < 0, \\ 1 - \exp(a - x) & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Berechnen Sie $f(-\pi)$ und $f(a)$ für $a > 0$.
(b) Bestimmen Sie den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

- (c) Bestimmen Sie alle Werte von $a \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion f stetig ist.
(d) Ermitteln Sie die Asymptote der Funktion f für $x \rightarrow +\infty$.

Lösung. (a) Für $x < 0$ gilt $f(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{x}$. Daher ist

$$f(-\pi) = \frac{1 - \cos(-2\pi)}{-\pi} = \frac{1 - 1}{-\pi} = 0.$$

Für $a > 0$ gilt $a \geq 0$, also verwenden wir die zweite Fallunterscheidung:

$$f(a) = 1 - \exp(a - a) = 1 - e^0 = 0.$$

- (b) Linksseitig ($x \rightarrow 0^-$):

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos(2x)}{x}.$$

Wir benutzen die Taylor-Entwicklung $\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) = 1 - 2x^2 + o(x^2)$ für $x \rightarrow 0$. Dann ist

$$1 - \cos(2x) = 2x^2 + o(x^2),$$

und somit

$$\frac{1 - \cos(2x)}{x} = \frac{2x^2 + o(x^2)}{x} = 2x + o(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0.$$

Also

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0.$$

Rechtsseitig ($x \rightarrow 0^+$): Für $x \geq 0$ gilt $f(x) = 1 - e^{a-x}$, also

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - e^{a-x} = 1 - e^{a-0} = 1 - e^a.$$

- (c) Für Stetigkeit in 0 müssen Funktionswert und die beiden einseitigen Grenzwerte übereinstimmen. Es gilt

$$f(0) = 1 - e^{a-0} = 1 - e^a.$$

Damit ist Stetigkeit in 0 äquivalent zu

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \iff 0 = 1 - e^a.$$

Dementsprechend muss gelten $a = 0$.

- (d) Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $x \geq 0$, also

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{a-x} = 1 - e^a \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 1.$$

Somit besitzt f die horizontale Asymptote

$$y = 1 \quad \text{für } x \rightarrow +\infty. \quad \square$$

Aufgabe 3 (1 + 1 Punkte). Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

(a) $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$

(b) $\int_0^1 x e^x dx$

Lösung. (a) Setze $u = 1 + x^2$, dann $du = 2x dx$. Die Grenzen werden zu $x = 0 \Rightarrow u = 1$ und $x = 1 \Rightarrow u = 2$. Somit:

$$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{u} du = \ln(2).$$

(b) Partielle Integration mit $u = x$ und $dv = e^x dx$. Dann:

$$\int_0^1 x e^x dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1.$$

□

Aufgabe 4 (1 + 2 + 1 + 1 Punkte). Ein Unternehmen analysiert die Preiselastizität der Nachfrage für eines seiner Produkte. Die Nachfragefunktion ist gegeben durch:

$$N(p) = 120 - 3p, \quad p \geq 0,$$

wobei $N(p)$ die nachgefragte Menge (in kg) und p der Preis (in Euro) sind.

- (a) Bestimmen Sie den sachlichen Definitionsbereich der Nachfragefunktion $N(p)$, unter Berücksichtigung der Bedingungen, dass sowohl der Preis als auch die nachgefragte Menge nicht negativ sein dürfen.
- (b) Bestimmen Sie die Wachstumsrate und die Elastizität der Nachfrage.
- (c) Prüfen Sie, ob die Nachfrage bei $p = 12$ bzw. $p = 32$ elastisch oder unelastisch ist. Begründen Sie Ihre Antwort.
- (d) Bestimmen Sie die Preis-Absatz-Funktion $P(N)$, das heißt die Umkehrfunktion von $N(p)$.

Lösung. (a) Es muss gelten $p \geq 0$ und $120 - 3p \geq 0$. Daher:

$$0 \leq p \leq 40.$$

(b)

$$N'(p) = -3.$$

Die Wachstumsrate ist

$$KN(p) = \frac{N'(p)}{N(p)} = \frac{-3}{120 - 3p} = \frac{1}{p - 40}.$$

Die Elastizität ergibt sich zu

$$EN(p) = p \cdot KN(p) = \frac{p}{p - 40}.$$

(c) Für $p = 12$ gilt

$$EN(12) = \frac{12}{12 - 40} = -\frac{3}{7},$$

also $|EN(12)| < 1$, somit ist die Nachfrage unelastisch.

Für $p = 32$ gilt

$$EN(32) = \frac{32}{32 - 40} = -4,$$

also $|EN(32)| > 1$, somit ist die Nachfrage elastisch.

(d) Aus $N = 120 - 3p$ folgt

$$p(N) = \frac{1}{3}(120 - N).$$

□

Aufgabe 5 (1 + 1 + 1 + 1 + 1). Bestimmen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren oder divergieren. Im Fall einer Konvergenz, bestimmen Sie den jeweiligen (uneigentlichen) Grenzwert.

- (a) $\frac{15n^8 - n^2}{5n^8 + 3n + 1}$ (c) $3 \arctan(n) + n \ln \left(1 - \frac{2}{n}\right)$
(d) $(-1)^{n(n-1)}$
(b) $\frac{9n^6 + \sin(3n)}{n^4 + 8 \cos(n^3)}$ (e) $\frac{6n^4 - 4n}{2n^5 + 1}$

Lösung. (a) Die Folge konvergiert und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n^8 - n^2}{5n^8 + 3n + 1} = \frac{15}{5} = 3.$$

(b) Die Folge konvergiert und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^6 + \sin(3n)}{n^4 + 8 \cos(n^3)} = \infty.$$

(c) Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \arctan(n) = \frac{3\pi}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 - \frac{2}{n}\right) = -2,$$

also insgesamt

$$\frac{3\pi}{2} - 2.$$

(d) Da $n(n-1)$ stets gerade ist, gilt $(-1)^{n(n-1)} = 1$ und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n(n-1)} = 1.$$

(e) Die Folge konvergiert und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4 - 4n}{2n^5 + 1} = 0.$$

□

Aufgabe 6 (1 + 1 + 1 + 2 Punkte). (a) Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x, y) = 24x - 3xy^2 - x^4.$$

Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x, y)$.

(b) Gegeben sei der Gradient einer Funktion $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 8x - 4y \\ -4x + 6y \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Hesse-Matrix $Hg(x, y)$.

(c) Gegeben sei der Gradient einer Funktion $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} 2x^2 - 18 \\ 6y \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von h .

(d) Gegeben sei eine Funktion $k: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Hesse-Matrix

$$Hk(x, y) = \begin{pmatrix} x - 1 & 0 \\ 0 & -y - 1 \end{pmatrix}.$$

Es sei bekannt, dass die Punkte

$$(0, 0), \quad (0, -2), \quad (2, 0), \quad (2, -2)$$

kritische Punkte von k sind.

Untersuchen Sie diese Punkte hinsichtlich ihres Charakters (lokale Minimalstelle, lokale Maximalstelle oder Sattelpunkt). Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung. (a)

$$f_x(x, y) = 24 - 3y^2 - 4x^3, \quad f_y(x, y) = -6xy.$$

Also

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 24 - 3y^2 - 4x^3 \\ -6xy \end{pmatrix}.$$

(b) Aus $\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$ folgt

$$g_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(8x - 4y) = 8, \quad g_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(8x - 4y) = -4,$$

$$g_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(-4x + 6y) = -4, \quad g_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(-4x + 6y) = 6.$$

Daher

$$Hg(x, y) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

(c) Kritische Punkte erfüllen $\nabla h(x, y) = \mathbf{0}$, also

$$2x^2 - 18 = 0, \quad 6y = 0.$$

Damit $x^2 = 9$, also $x = \pm 3$, und $y = 0$. Somit sind die kritischen Punkte

$$(3, 0) \quad \text{und} \quad (-3, 0).$$

(d) Da die Hesse-Matrix diagonal ist, entscheidet das Vorzeichen der Diagonaleinträge.

$$Hk(x, y) = \begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & -y-1 \end{pmatrix}.$$

- Für $(0, 0)$:

$$Hk(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

negativ definit $\Rightarrow$ lokale Maximalstelle.

- Für $(2, -2)$:

$$Hk(2, -2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

positiv definit $\Rightarrow$ lokale Minimalstelle.

- Für $(0, -2)$:

$$Hk(0, -2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt.

- Für $(2, 0)$:

$$Hk(2, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt.

□

Aufgabe 7 (1 + 1 + 1 + 2 Punkte). Gegeben sind die folgenden Nachfrage- und Angebotsfunktionen:

$$D(p) = 40 - p, \quad S(p) = p,$$

wobei $D(p)$ die nachgefragte Menge, $S(p)$ die angebotene Menge und p der Preis sind.

- (a) Berechnen Sie die Grenznachfragefunktion d.h. $D'(p)$.
- (b) Bestimmen Sie den Gleichgewichtspreis p^* , d.h. der Preis p^* bei dem sich Nachfrage und Angebot ausgleichen: $D(p^*) = S(p^*)$.
- (c) Berechnen Sie die entsprechende Gleichgewichtsmenge q^* , gegeben durch $q^* = D(p^*)$.
- (d) Ermitteln Sie die Konsumentenrente. *Für diesen Aufgabenteil gelten die folgenden Daten (unabhängig von (a)–(c)):*

Die Nachfrage- und Angebotsfunktion seien gegeben durch

$$D(p) = 60 - 2p, \quad S(p) = 2p.$$

Der Gleichgewichtspreis beträgt $p^* = 15$ und die Gleichgewichtsmenge beträgt $q^* = 30$.

Berechnen Sie die Konsumentenrente mit

$$\text{Konsumentenrente} = \int_0^{p^*} D(p) dp - p^* \cdot q^*.$$

Lösung. (a)

$$D'(p) = -1.$$

- (b) Aus $D(p^*) = S(p^*)$ folgt

$$40 - p^* = p^* \implies 40 = 2p^* \implies p^* = 20.$$

- (c)

$$q^* = D(20) = 40 - 20 = 20 \quad (\text{auch } q^* = S(20) = 20).$$

- (d) Wir verwenden die in der Aufgabenstellung für Teil (d) angegebenen Daten:

$$\begin{aligned} \int_0^{p^*} D(p) dp &= \int_0^{15} (60 - 2p) dp = \left[60p - p^2 \right]_0^{15} \\ &= 60 \cdot 15 - 15^2 = 900 - 225 = 675. \end{aligned}$$

Damit ist die Konsumentenrente

$$675 - 15 \cdot 30 = 675 - 450 = 225.$$

□

Aufgabe 8 (1 + 1 + 2 + 1 Punkte). Betrachten Sie die Funktion

$$g: [-3, 3] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto -x^3 + 12x.$$

- (a) Bestimmen Sie, ob g eine gerade oder ungerade Funktion ist.
- (b) Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von g .
- (c) Bestimmen Sie die globalen Minimal- bzw. Maximalstellen von g .
- (d) Ermitteln Sie alle Wendestellen von g .

Lösung. (a)

$$g(-x) = -(-x)^3 + 12(-x) = x^3 - 12x = -(-x^3 + 12x) = -g(x).$$

Also ist g ungerade.

(b)

$$g'(x) = -3x^2 + 12, \quad g''(x) = -6x.$$

(c) Zunächst bestimmen wir die kritischen Punkte:

$$g'(x) = 0 \iff -3x^2 + 12 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2.$$

Diese liegen im Intervall $[-3, 3]$. Für globale Extremstellen müssen wir außerdem die Randpunkte $x = -3$ und $x = 3$ berücksichtigen.

Wir berechnen die Funktionswerte:

$$\begin{aligned} g(-3) &= -(-3)^3 + 12(-3) = 27 - 36 = -9, \\ g(3) &= -(3)^3 + 12 \cdot 3 = -27 + 36 = 9, \\ g(-2) &= -(-2)^3 + 12(-2) = 8 - 24 = -16, \\ g(2) &= -(2)^3 + 12 \cdot 2 = -8 + 24 = 16. \end{aligned}$$

Damit folgt:

- Globales Minimum bei $x = -2$ mit $g(-2) = -16$.
- Globales Maximum bei $x = 2$ mit $g(2) = 16$.

(d) Wendestellen erfüllen $g''(x) = 0$:

$$-6x = 0 \implies x = 0.$$

Da $g'''(x) = -6 \neq 0$, liegt bei $x = 0$ tatsächlich eine Wendestelle vor.
(Wendepunkt: $(0, g(0)) = (0, 0)$.) $\square$

Aufgabe 9 (1 + 1 + 1 Punkte). Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- (a) Berechnen Sie das Matrixprodukt $A \cdot B$.
- (b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die $A \cdot B = B \cdot A$ gilt.
- (c) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung. (a)

$$A(a)B(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 2a & 2 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$B(a)A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a^2 & a+2 \end{pmatrix}.$$

Gleichheit liefert

$$2a = a, \quad 2a = a^2, \quad 2 = a + 2 \implies a = 0.$$

(c)

$$\det(C) = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(12) - (-1) = 24 + 1 = 25. \quad \square$$

Oder Sarrus:

$$\det(C) = 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - (0 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 4) = 24 + 1 = 25.$$