

Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschriebene Notizen
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/8	/9	/11	/10	/7	/10	/9	/65

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x :

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t) dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	$x+0.00$	$x+0.01$	$x+0.02$	$x+0.03$	$x+0.04$	$x+0.05$	$x+0.06$	$x+0.07$	$x+0.08$	$x+0.09$
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.49506$.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (8 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (z. B. durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegen/Beispiels).

2A. Sei $(\Omega, \mathbf{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und A, B zwei unabhängige Ereignisse. Sind die Komplemente $\overline{A}$ und $\overline{B}$ ebenfalls unabhängige (voneinander) Ereignisse?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:



2

2B. Sei $f : [1, \infty] \times [1, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch
$$\begin{cases} 1/y, & \text{falls } x \leq y \leq x+1, \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^\infty f(x, y) dy = \int_1^\infty \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) dy$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:



2

2C. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare, stückweise stetig differenzierbare Funktion, und sei $\hat{f}$ ihre Fourier-Transformierte. Gilt dann $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

2D. Besitzt das Anfangswertproblem $y'(t) = |y(t)|^{1/2}$, $y(0) = 1$, genau eine Lösung in einer Umgebung von $t = 0$? Begründen Sie ihre Antwort.

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

Aufgabe 3. *Integration und Integralsätze in der Ebene* (9 Punkte)

Es seien gegeben $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$, eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^3}$, und ein Vektorfeld $g_a: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$g_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + a(a-3) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \frac{a}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$.

3A. Skizzieren Sie die Menge U .



1

3B. Berechnen Sie das Integral $\int_U f(x, y) \, d(x, y)$.

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten sowie $\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$.

$$\int_U f(x, y) \, d(x, y) =$$

2

Aufgabe 4. *Integration und Integralsätze im Raum* (11 Punkte)

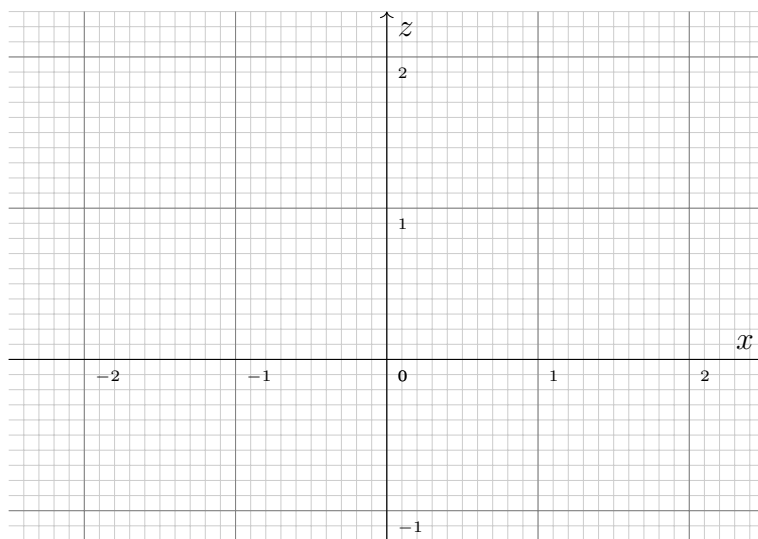
Wir untersuchen ein Vektorfeld $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit einem Pol am Ursprung, das durch

$$f(v) = \left(1 + \frac{1}{|v|^3}\right) v, \quad \text{ausführlich} \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(1 + \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Dazu betrachten wir eine Halbkugel H und einen Kegel K :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ z \geq 0 \end{array} \right\}, \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq (2z + 1)^2, \\ -\frac{1}{2} \leq z \leq 0 \end{array} \right\}.$$

4A. Skizzieren Sie den Schnitt von der Vereinigung $C = H \cup K$ mit der x - z -Ebene.



2

Wir zerlegen ∂C in drei Teile S_+ , S_0 und S_- gegeben durch:

$$S_+ = \partial C \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}, \quad S_0 = \partial C \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}, \\ S_- = \partial C \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}.$$

4B. Berechnen Sie das Flussintegral $\int_{S_+} f \cdot dS$ durch die obere Fläche S_+ .

Hinweis: Es geht ohne Parametrisierung der Fläche.

$$\int_{S_+} f \cdot dS =$$

2

4C. Bestimmen Sie das Flussintegral $\int_{S_0} f \cdot dS$ durch den Ring S_0 .

1

4D. Berechnen Sie das Volumen $\text{vol}_3(C)$.

Hinweis: Das Volumen des Kegels mit der Höhe h und dem Grundradius r beträgt $\frac{\pi}{3}hr^2$.

$\text{vol}_3(C) =$

1

4E. Berechnen Sie zu f die Divergenz $\text{div}(f)$.

Hinweis: Sie ist konstant.

$\text{div}(f) =$

2

4F. Berechnen Sie schließlich das Flussintegral $\int_{S_-} f \cdot dS$ durch die untere Fläche S_- .

Hinweis: Es könnte hilfreich sein, den Hilfskörper $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0 \right\} \setminus K$ zu betrachten.

3

Aufgabe 5. *Lineare Differentialgleichungssysteme* (10 Punkte)

Zu lösen ist für $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ das lineare inhomogene Anfangswertproblem

$$y'(t) = Ay(t) + b(t), \quad y(0) = y_0,$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5A. Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A mit den algebraischen Vielfachheiten e_1 und e_2 .

$\lambda_1 =$		$e_1 =$	
$\lambda_2 =$		$e_2 =$	

 2

5B. Betrachten Sie den Hauptvektor $w = (0, 0, 1, 0)^T$ von A . Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert sowie die Hauptvektorkette.

Eigenwert:		Hauptvektorkette:	
------------	--	-------------------	---

 2

5C. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des homogenen Systems $y'(t) = Ay(t)$ und geben Sie die zugehörige Fundamentalmatrix $Y(t)$ an.

$Y(t) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \end{array} \right)$

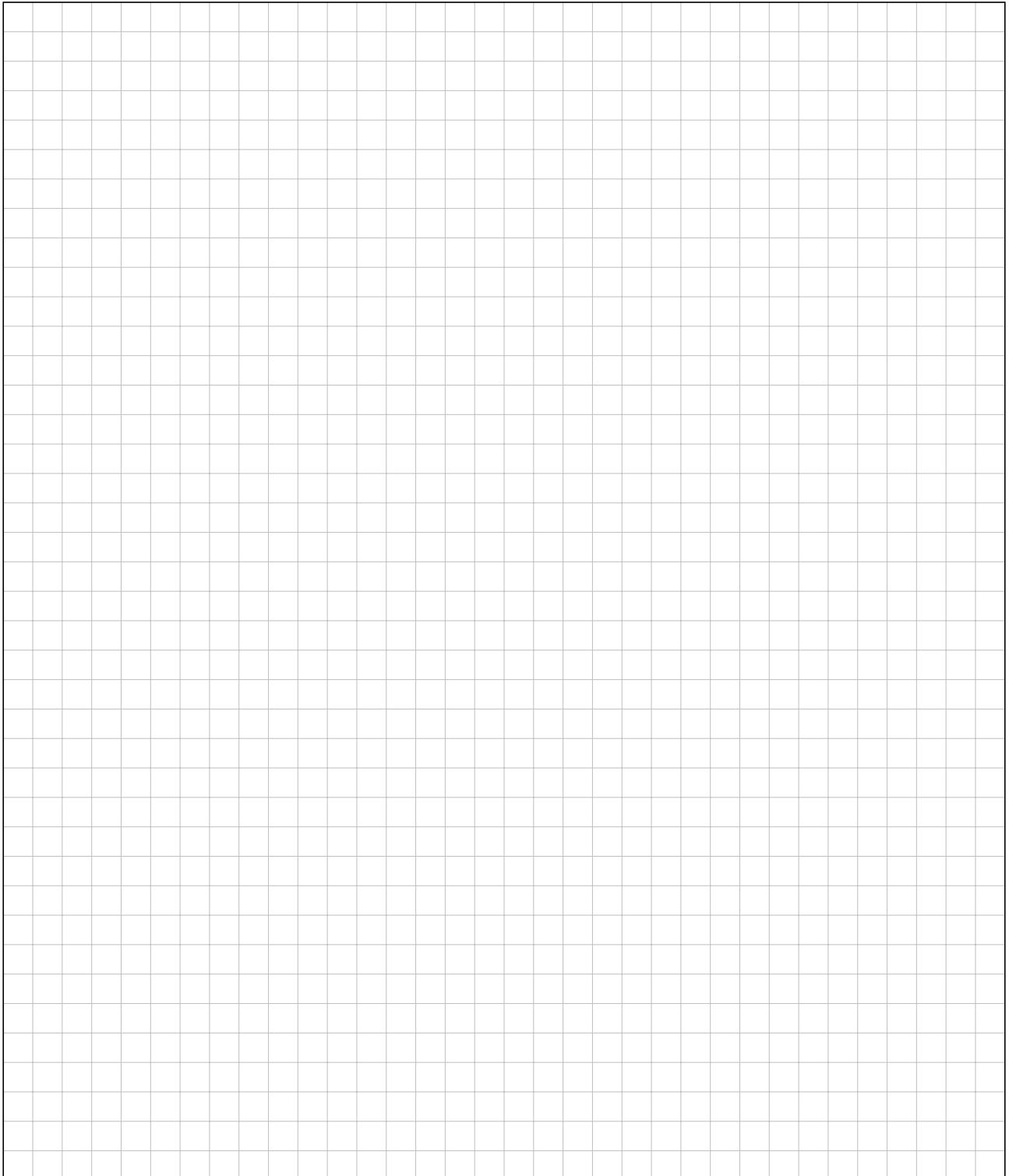
 4

5D. Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems explizit mittels Variation der Konstanten.

Hinweis: Die Inverse der Fundamentalmatrix ist durch

$$Y(t)^{-1} = \begin{pmatrix} e^t & -te^t & \frac{t^2}{2}e^t & 0 \\ 0 & e^t & -te^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix},$$

gegeben.



Aufgabe 6. *Partielle Differentialgleichungen* (7 Punkte)

Wir untersuchen die dreidimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0.$$

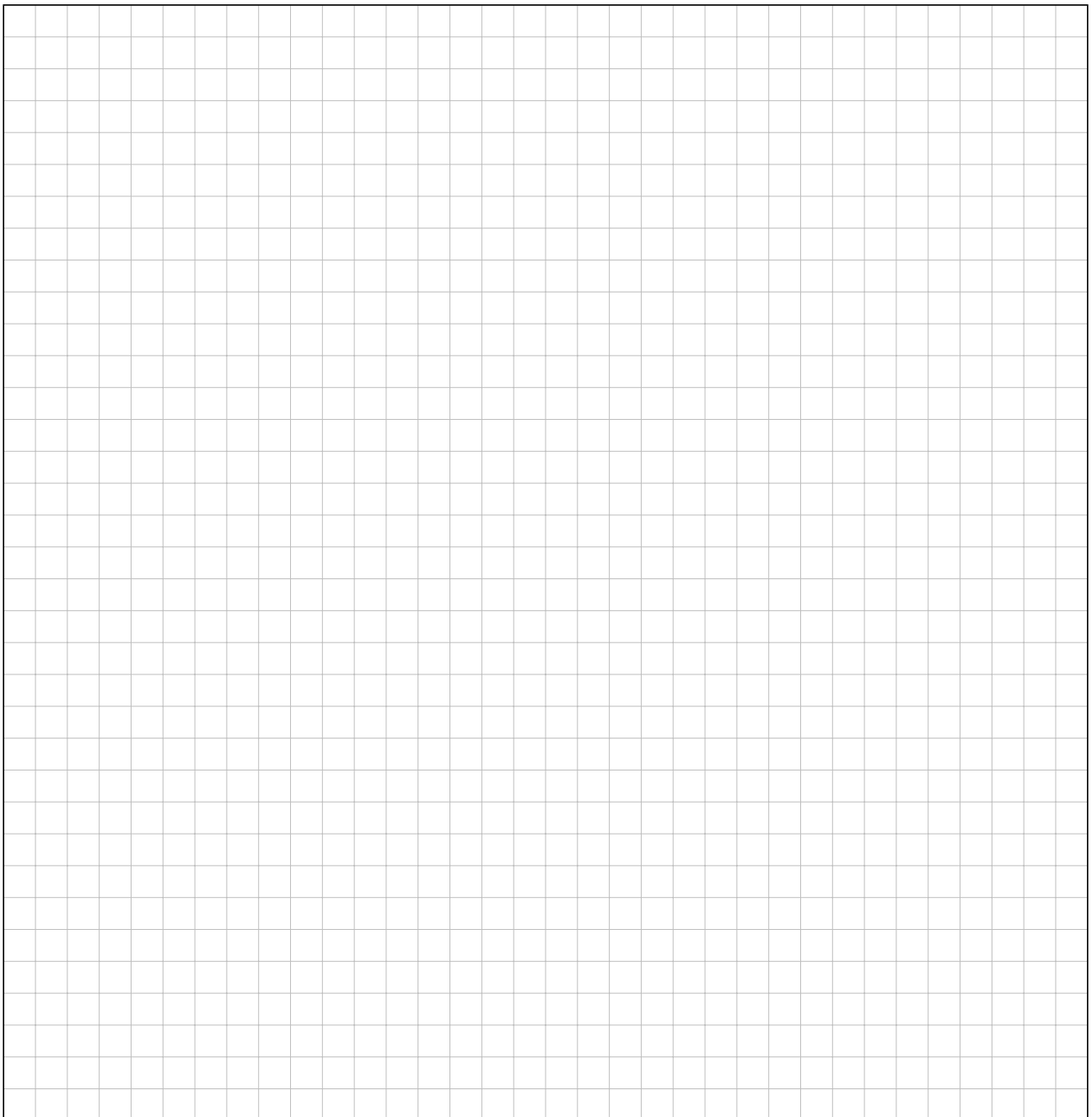
für eine Funktion $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, sowie ihr eindimensionales Analogon

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

für $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$.

6A. Berechnen Sie eine Lösung u von der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung mit $u(x, 0) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

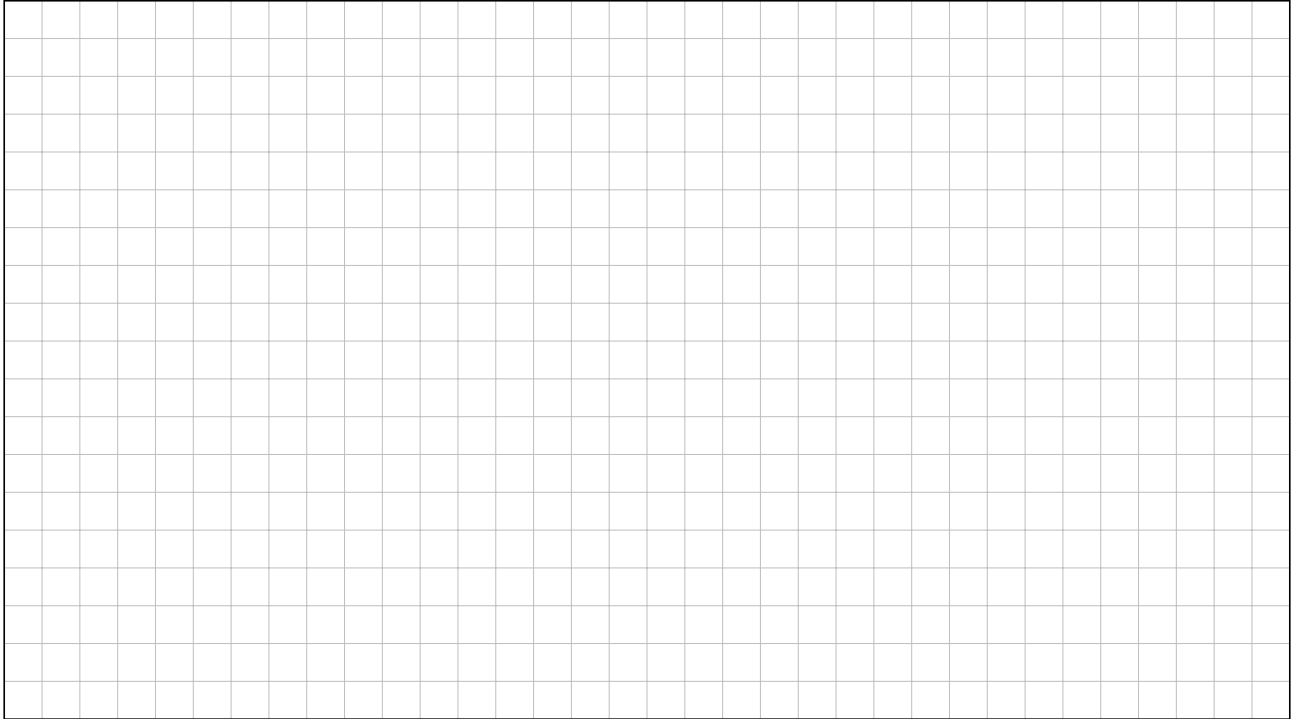
Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $u(x, t) = v(x) + w(t)$.



6B. Es seien u_1, u_2, u_3 drei Lösungen der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung. Zeigen Sie, dass die Funktion $u: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$u(x, y, z, t) = u_1(x, t)u_2(y, t)u_3(z, t)$$

eine Lösung der dreidimensionalen Wärmeleitungsgleichung ist.



2

6C. Berechnen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x, y, z, t) - \Delta u(x, y, z, t) = 0 & \text{für alle } x, y, z \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = x^2 y^2 z^2 & \text{für alle } x, y, z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

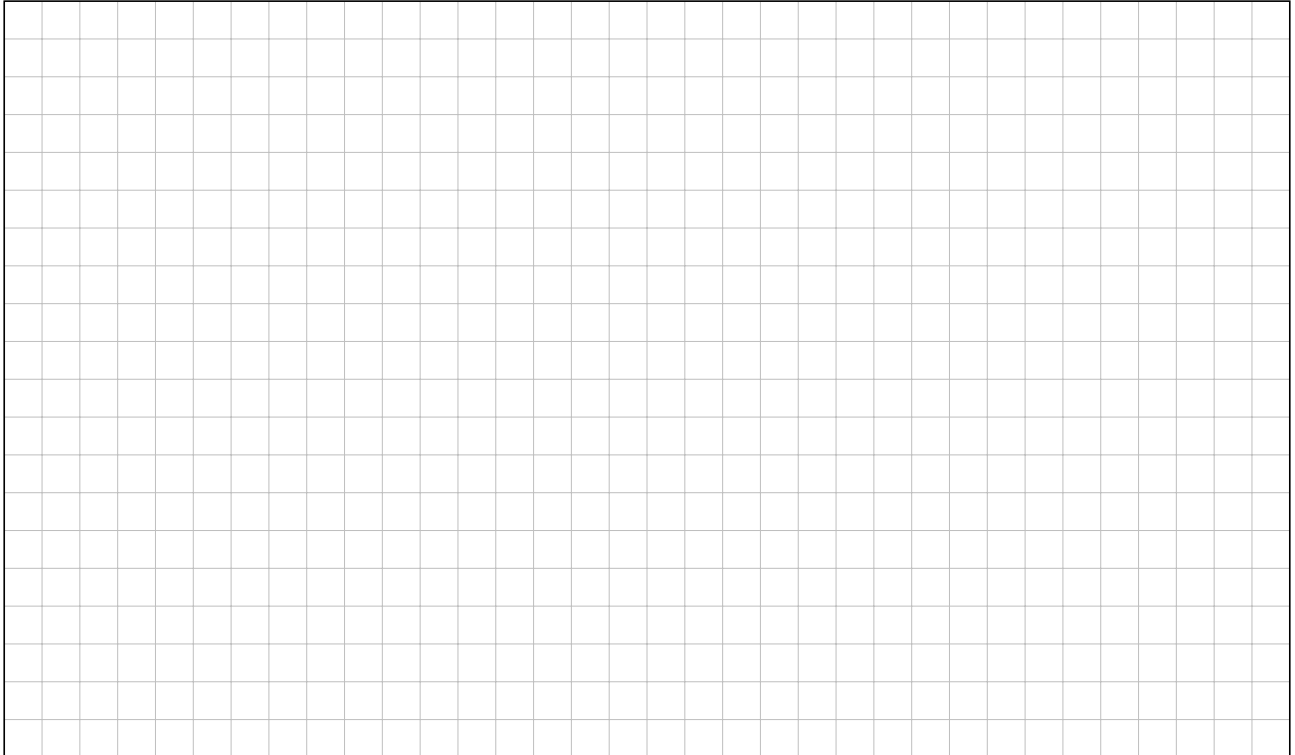


2

Aufgabe 7. *Wahrscheinlichkeit* (10 Punkte)

Ein Sommelier erhält mit Wahrscheinlichkeit 40% Rotwein, mit Wahrscheinlichkeit 40% Weißwein und mit Wahrscheinlichkeit 20% Roséwein. Falls er Rotwein erhalten hat, erkennt er diesen mit einer Wahrscheinlichkeit von 80%. Bei Weißwein schafft er es noch zu 60%, und Roséwein erkennt er nur zu 40%.

7A. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erkennt der Sommelier einen Wein richtig?



2

7B. Falls er richtig lag, mit welcher Wahrscheinlichkeit erhielt er Rotwein?



2

Eine Fluggesellschaft hat $C = 500$ Sitzplätze. Sie verkauft 25% mehr Tickets als Sitzplätze. Jedes verkaufte Ticket wird unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.2$ kurzfristig storniert. Sei X die Anzahl der Passagiere, die tatsächlich zum Check-In erscheinen.

7C. Geben Sie die Verteilung von X an.



1

7D. Bestimmen Sie $\mu = \mathbf{E}(X)$ und $\sigma^2 = \mathbf{V}(X)$.

$$\mu = \boxed{} \qquad \sigma^2 = \boxed{}$$

2

7E. Bestimmen Sie mithilfe des lokalen Grenzwertsatzes näherungsweise die Wahrscheinlichkeit (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt), dass mehr Passagiere zum Check-in erscheinen als Sitzplätze vorhanden sind. Geben Sie die Grenzen α und β explizit an.

Hinweis: Sie dürfen davon ausgehen, dass $\int_0^x \varphi(t) \, dt = \frac{1}{2}$ für $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ und $x > 10$.

[illegible]

2

7F. Geben Sie eine vernünftige Fehlerschranke δ für die Annäherung an. (Sie können Ihre Antwort als Bruch angeben.)

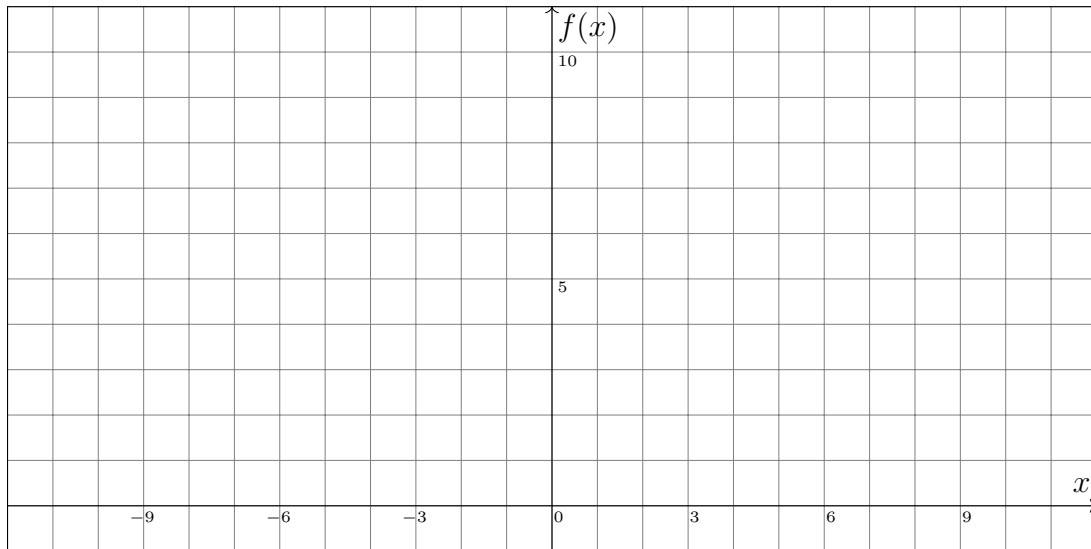
$$|\delta| <$$

1

Aufgabe 8. *Fourier-Reihen* (9 Punkte)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2π -periodische Funktion, definiert durch $f(x) = x^2$ für $x \in (-\pi, \pi]$.

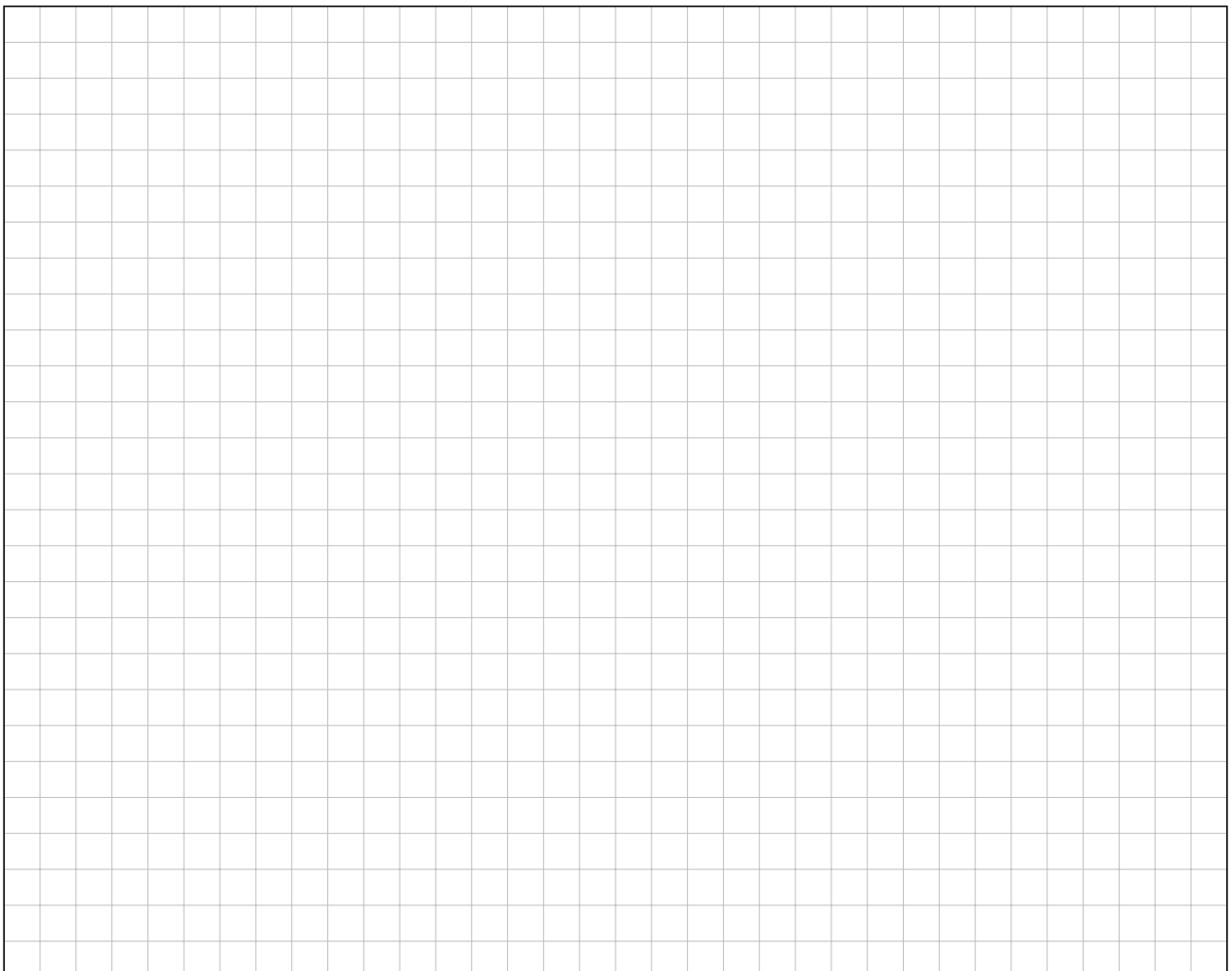
8A. Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-3\pi, 3\pi]$:



1

8B. Bestimmen Sie zu f die Koeffizienten der Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$



3

8C. Gegen welchen Wert c genau konvergiert die Fourier-Reihe von f in $x = \pi$?

$$\mathcal{C} =$$

--

8D. Bestimmen Sie den exakten Wert der Reihe $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Hinweis: Energiegleichung nach Parseval.

1

2

8E. Sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2π -periodische Funktion, definiert durch $g(x) = x^3$ für $x \in (-\pi, \pi]$. Leiten Sie aus den vorherigen Ergebnissen die Fourierreihe von g her.

2