

Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Studiengang: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschriebene Notizen
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/8	/9	/11	/10	/7	/10	/9	/65

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x :

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t) dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	$x+0.00$	$x+0.01$	$x+0.02$	$x+0.03$	$x+0.04$	$x+0.05$	$x+0.06$	$x+0.07$	$x+0.08$	$x+0.09$
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.49506$.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (8 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (z. B. durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegen/Beispiels).

2A. Sei $(\Omega, \mathbf{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und A, B zwei unabhängige Ereignisse. Sind die Komplemente $\bar{A}$ und $\bar{B}$ ebenfalls unabhängige (voneinander) Ereignisse?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung: Ja die Komplemente sind auch unabhängig, das folgt aus wenn A und B unabhängig sind dann ist auch A und $\bar{B}$ unabhängig, da

$$\mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(A \cap \bar{B}).$$

Wir wenden die gleiche Argumentationskette auf $\bar{B}$ und A an. Damit die unabhängig von $\bar{A}$ und $\bar{B}$ folgt.

2

2B. Sei $f : [1, \infty] \times [1, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{cases} 1/y, & \text{falls } x \leq y \leq x+1, \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^\infty f(x, y) dy = \int_1^\infty \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) dy$?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung: Auch wenn wir das Majoranten Kriterium nicht anwenden können rechnen wir konkret

$$\int_1^\infty f(x, y) dy = \ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \rightarrow 0.$$

und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) = 0$ für alle $y \geq 1$. Damit gilt die Gleichung.

2

2C. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare, stückweise stetig differenzierbare Funktion, und sei $\widehat{f}$ ihre Fourier-Transformierte. Gilt dann $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}) = f$?

☐	Ja	☒	Nein. Begründung: Wie in der Vorlesung (Folie K110) gezeigt wurde, unterscheidet sich für die Indikatorfunktion $f = \mathbf{I}_{[a,b]}$ die Fourier-Inverse $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})$ von f an den Punkten a und b : An diesen beiden Stellen ist ihr Wert $\frac{1}{2}$ und nicht 1. Beachten Sie, dass es nicht ausreicht, lediglich Satz K1F zu zitieren. Dieser besagt, dass für f stückweise stetig differenzierbar, absolut integrierbar und sprungnormiert gilt, dass $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})$ mit f übereinstimmt. Aus diesem Satz folgt jedoch nicht unmittelbar, dass sich $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})$ von f unterscheidet, wenn f nicht sprungnormiert ist (auch wenn sich dies ohne großen Aufwand zeigen lässt).
--------------------------	----	-------------------------------------	---

2

2D. Besitzt das Anfangswertproblem $y'(t) = |y(t)|^{1/2}$, $y(0) = 1$, genau eine Lösung in einer Umgebung von $t = 0$? Begründen Sie ihre Antwort.

☒	Ja	☐	Nein. Begründung: Die Funktion $f(x, y) := y ^{1/2}$ ist stetig differenzierbar im Punkt $(0, 1)$, damit ist Satz M1C anwendbar.
-------------------------------------	----	--------------------------	--

2

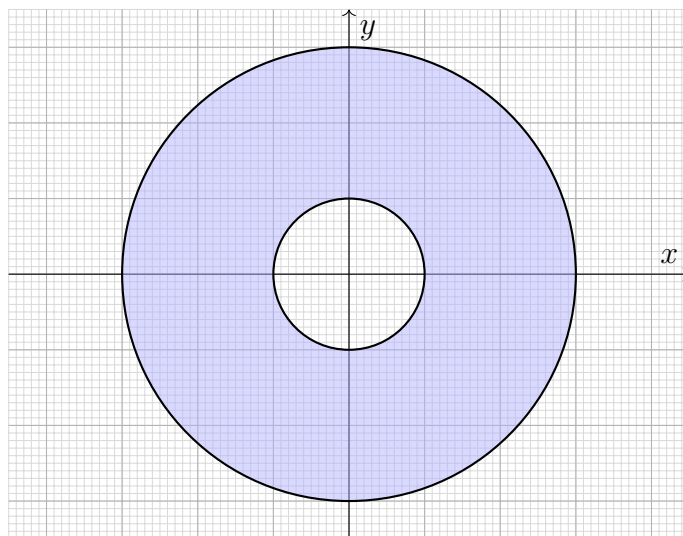
Aufgabe 3. *Integration und Integralsätze in der Ebene* (9 Punkte)

Es seien gegeben $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$, eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^3}$, und ein Vektorfeld $g_a: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$g_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + a(a-3) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \frac{a}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$.

3A. Skizzieren Sie die Menge U .



1

3B. Berechnen Sie das Integral $\int_U f(x, y) \, d(x, y)$.

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten sowie $\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$.

$$\int_U f(x, y) \, d(x, y) = \frac{4}{9}\pi$$

Wir berechnen mithilfe von Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \int_U f(x, y) \, d(x, y) &= \int_{[1,3] \times [0,2\pi]} \rho f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \, d(\rho, \theta) \\ &= \int_1^3 \int_0^{2\pi} \rho \frac{\rho^2 \cos^2(\theta)}{\rho^6} \, d\rho \, d\theta \\ &= \int_1^3 \frac{d\rho}{\rho^3} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \, d\theta \\ &= \left[-\frac{1}{2\rho^2} \right]_{\rho=1}^3 \cdot \left(\left[\frac{\theta}{2} \right]_{\theta=0}^{2\pi} + \left[\frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_{\theta=0}^{2\pi} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{18} \right) \pi = \frac{4}{9}\pi. \end{aligned}$$

2

3C. Berechnen Sie zu g_a die Rotation $\text{rot}(g_a)$:

$$\text{rot}(g_a) = 2a(a - 3)$$

Wir berechnen für die einzelnen Summanden

$$\text{rot} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$\text{rot} \left(a(a - 3) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right) = a(a - 3)(1 + 1) = 2a(a - 3)$$

$$\text{rot} \left(\frac{a}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right) = a \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + a \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0,$$

damit ergibt sich $\text{rot}(g_a) = 2a(a - 3)$.

2

3D. Sei $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow U$, $\gamma(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$. Berechnen Sie das Wegintegral $\oint_{\gamma} g_a(x, y) \cdot d\gamma$:

$$\oint_{\gamma} g_a(x, y) \cdot d\gamma = 2\pi a(4a - 11)$$

$$\int_{\gamma} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \end{pmatrix} dt = 4 \int_0^{2\pi} \cos(2t) dt = 0.$$

$$\int_{\gamma} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -2 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \end{pmatrix} dt = 4 \int_0^{2\pi} dt = 8\pi.$$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\gamma = \frac{1}{4} \int_{\gamma} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\gamma = 2\pi$$

Damit gilt für $\oint_{\gamma} g_a(x, y) \cdot d\gamma = 8\pi a(a - 3) + 2\pi a = 2\pi a(4a - 11)$.

2

3E. Für welches $a \in \mathbb{R}$ besitzt g_a ein Potential? Begründung?

Aus (c) wissen wir, dass $a \in \{0, 3\}$ gelten muss. Da $\oint_{\gamma} g_3(x, y) \cdot d\gamma \neq 0$ gilt, besitzt g_3 kein Potential. Da $\oint_{\gamma} g_0(x, y) \cdot d\gamma = 0$ ist, verschwindet das Integral von g_0 entlang jedes geschlossenen Weges in U , also besitzt g_0 ein Potential. Alternativ kann man bemerken, dass

$g_0 = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ gilt, hierfür ist ein Potential offensichtlich durch $h(x, y) = xy$ gegeben.

Insgesamt lautet die Antwort also: nur für $a = 0$.

2

Aufgabe 4. *Integration und Integralsätze im Raum* (11 Punkte)

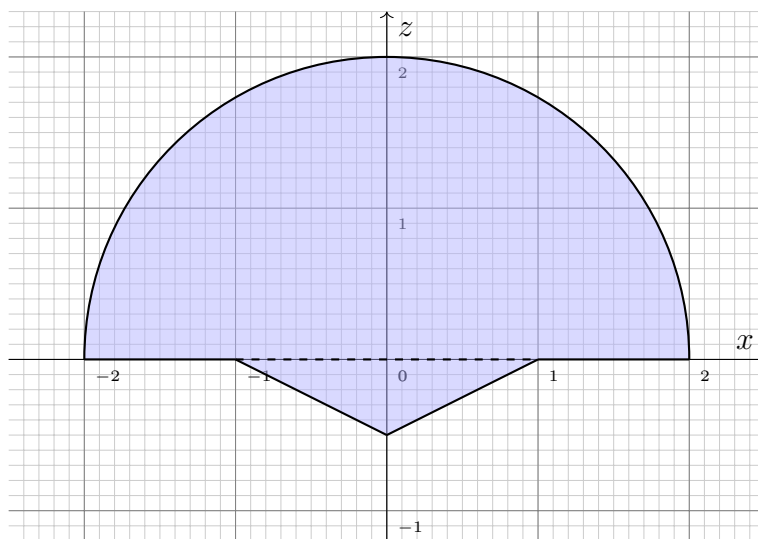
Wir untersuchen ein Vektorfeld $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit einem Pol am Ursprung, das durch

$$f(v) = \left(1 + \frac{1}{|v|^3}\right) v, \quad \text{ausführlich} \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(1 + \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Dazu betrachten wir eine Halbkugel H und einen Kegel K :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq 0 \right\}, \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq (2z + 1)^2, \quad -\frac{1}{2} \leq z \leq 0 \right\}.$$

4A. Skizzieren Sie den Schnitt von der Vereinigung $C = H \cup K$ mit der x - z -Ebene.



2

Wir zerlegen ∂C in drei Teile S_+ , S_0 und S_- gegeben durch:

$$S_+ = \partial C \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}, \quad S_0 = \partial C \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}, \\ S_- = \partial C \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}.$$

4B. Berechnen Sie das Flussintegral $\int_{S_+} f \cdot dS$ durch die obere Fläche S_+ .

Hinweis: Es geht ohne Parametrisierung der Fläche.

$$\begin{aligned} \int_{S_+} f \cdot dS &= 18\pi \\ \int_{S_+} f(s) \cdot dS &= \int_{S_+} f(s) \cdot n(s) |dS| = \int_{S_+} \left(1 + \frac{1}{|s|^3}\right) s \cdot \frac{s}{|s|} |dS| \\ &= \int_{S_+} \left(|s| + \frac{1}{|s|^2}\right) |dS| \\ &= \int_{S_+} \left(2 + \frac{1}{4}\right) |dS| \\ &= 18\pi. \end{aligned}$$

2

4C. Bestimmen Sie das Flussintegral $\int_{S_0} f \cdot dS$ durch den Ring S_0 .

Man beachte, dass $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(1 + \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt und die z -Komponente von $f(x, y, 0)$ gleich null ist. Das bedeutet, dass $f(x, y, 0)$ tangential zur xy -Ebene verläuft und insbesondere tangential zum Ring S_0 ist. Folglich steht f in jedem Punkt $s \in S_0$ senkrecht auf dem Normalenvektor $n(s)$, und daher $\int_{S_0} f \cdot dS = \int_{S_0} 0 dS = 0$.

1

4D. Berechnen Sie das Volumen $\text{vol}_3(C)$.

Hinweis: Das Volumen des Kegels mit der Höhe h und dem Grundradius r beträgt $\frac{\pi}{3}hr^2$.

$$\text{vol}_3(C) = \frac{11}{2}\pi$$

Wir berechnen mit den bekannten Formeln für die Kugel und Kegel und erhalten

$$\text{vol}_3(K) = \frac{2}{3}\pi \cdot 2^3 + \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{11}{2}\pi.$$

1

4E. Berechnen Sie zu f die Divergenz $\text{div}(f)$.

Hinweis: Sie ist konstant.

$$\begin{aligned} \text{div}(f) &= \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \\ &= 1 + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + 1 + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + 1 + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

2

4F. Berechnen Sie schließlich das Flussintegral $\int_{S_-} f \cdot dS$ durch die untere Fläche S_- .

Hinweis: Es könnte hilfreich sein, den Hilfskörper $D = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\right\} \setminus K$ zu betrachten.

Der Vorteil der Verwendung des Körpers D besteht darin, dass f in seinem Inneren keine Pole besitzt, sodass wir den Gaußschen Satz anwenden können. Der Rand ∂D setzt sich aus der unteren Halbkugel $-S_+$ vom Radius 2 (deren Fluss dem durch S_+ entspricht, also 18π), dem Ring S_0 mit entgegengesetzter Orientierung (dessen Fluss noch gleich null ist) sowie der Kegeloberfläche S_- mit entgegengesetzter Orientierung zusammen. Es gilt:

$$\int_D \text{div}(f) dV = \int_{\partial D} f \cdot dS = \int_{-S_+} f \cdot dS - \int_{S_0} f \cdot dS - \int_{S_-} f \cdot dS.$$

Wir berechnen zunächst $\int_D \text{div}(f) dV = 3\left(\frac{2}{3}\pi \cdot 2^3 - \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{31}{2}\pi$. Insgesamt erhalten wir $\int_{S_-} f \cdot dS = 18\pi - \frac{31}{2}\pi = \frac{5}{2}\pi$.

3

Aufgabe 5. *Lineare Differentialgleichungssysteme* (10 Punkte)

Zu lösen ist für $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ das lineare inhomogene Anfangswertproblem

$$y'(t) = Ay(t) + b(t), \quad y(0) = y_0,$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5A. Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A mit den algebraischen Vielfachheiten e_1 und e_2 .

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = \boxed{-1} & e_1 = \boxed{3} \\ \lambda_2 = \boxed{2} & e_2 = \boxed{1} \end{array}$$

2

5B. Betrachten Sie den Hauptvektor $w = (0, 0, 1, 0)^T$ von A . Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert sowie die Hauptvektorkette.

$$\begin{array}{ll} \text{Eigenwert: } \boxed{-1} & \text{Hauptvektorkette: } \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \end{array}$$

2

5C. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des homogenen Systems $y'(t) = Ay(t)$ und geben Sie die zugehörige Fundamentalmatrix $Y(t)$ an.

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & t \cdot e^{-t} & t^2/2 \cdot e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & t \cdot e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

4

5D. Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems explizit mittels Variation der Konstanten.

Hinweis: Die Inverse der Fundamentalmatrix ist durch

$$Y(t)^{-1} = \begin{pmatrix} e^t & -te^t & \frac{t^2}{2}e^t & 0 \\ 0 & e^t & -te^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix},$$

gegeben.

Wir verwenden Satz O3D, welcher besagt: Zu lösen sei das inhomogene Differentialgleichssystem

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \quad \text{mit } y(t_0) = y_0.$$

Zu jedem Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}^n$ existiert genau eine Lösung, nämlich

$$y(t) = Y(t) \int_{t_0}^t Y(\tau)^{-1} b(\tau) d\tau + Y(t) Y(t_0)^{-1} y_0.$$

Berechnen wir nun das Integral

$$\int_0^t Y(\tau)^{-1} b(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der anderen Terme liefert nun

$$y(t) = \begin{pmatrix} te^{-t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2}e^{-t} \\ te^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(t + \frac{t^2}{2}\right)e^{-t} \\ te^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6. *Partielle Differentialgleichungen* (7 Punkte)

Wir untersuchen die dreidimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0.$$

für eine Funktion $u: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, sowie ihr eindimensionales Analogon

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

für $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$.

6A. Berechnen Sie eine Lösung u von der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung mit $u(x, 0) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $u(x, t) = v(x) + w(t)$.

Wir verwenden den Ansatz aus dem Hinweis und zwar $u(x, t) = v(x) + w(t)$. Betrachten wir die Anfangsbedingung so ergibt sich

$$u(x, 0) = v(x) + w(0) = x^2.$$

Wir schlussfolgern damit $v(x) = x^2 - C$, wobei $C = w(0)$.

In Kombination mit der Wärmeleitungsgleichung erhalten wir nun

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2,$$

also $w(t) = 2t + C$. Insgesamt erhalten wir

$$u(x, t) = x^2 - C + 2t + C = x^2 + 2t.$$

6B. Es seien u_1, u_2, u_3 drei Lösungen der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung. Zeigen Sie, dass die Funktion $u: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$u(x, y, z, t) = u_1(x, t)u_2(y, t)u_3(z, t)$$

eine Lösung der dreidimensionalen Wärmeleitungsgleichung ist.

Wir berechnen die notwendigen Ableitungen und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial(u_1 u_2 u_3)}{\partial t} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) u_2 u_3 + u_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right) u_3 + u_1 u_2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) u_2 u_3 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_1 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\right) u_3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u_1 u_2 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}\right) \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) u_2 u_3 + u_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\right) u_3 + u_1 u_2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}\right) \end{aligned}$$

Da u_j die Wärmeleitungsgleichung lösen erhalten wir

$$= 0 \cdot u_2 u_3 + u_1 \cdot 0 \cdot u_3 + u_1 u_2 \cdot 0 = 0$$

Wir schlussfolgern u löst die 3-dimensionale Wärmeleitungsgleichung.

2

6C. Berechnen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, z, t) - \Delta u(x, y, z, t) = 0 & \text{für alle } x, y, z \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = x^2 y^2 z^2 & \text{für alle } x, y, z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aus 6A und 6B wissen wir nun, dass eine Lösung kann durch

$$u(x, y, z, t) = (x^2 + 2t)(y^2 + 2t)(z^2 + 2t).$$

gegeben werden. Diese Funktion erfüllt tatsächlich die Anfangsbedingung.

2

Aufgabe 7. *Wahrscheinlichkeit* (10 Punkte)

Ein Sommelier erhält mit Wahrscheinlichkeit 40% Rotwein, mit Wahrscheinlichkeit 40% Weißwein und mit Wahrscheinlichkeit 20% Roséwein. Falls er Rotwein erhalten hat, erkennt er diesen mit einer Wahrscheinlichkeit von 80%. Bei Weißwein schafft er es noch zu 60%, und Roséwein erkennt er nur zu 40%.

7A. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erkennt der Sommelier einen Wein richtig?

Definiere die folgenden Ereignisse:

A_1 : Der Sommelier erhält Rotwein B_1 : Der Sommelier erkennt einen Wein richtig

A_2 : Der Sommelier erhält Weißwein B_2 : Der Sommelier erkennt einen Wein falsch

A_3 : Der Sommelier erhält Roséwein

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B_1) &= \sum_{k=1}^3 \mathbf{P}(B|A_k)\mathbf{P}(A_k) = 0.8 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.4 \\ &= 0.32 + 0.24 + 0.08 \\ &= 0.64 \end{aligned}$$

wobei der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit verwendet wurde.

2

7B. Falls er richtig lag, mit welcher Wahrscheinlichkeit erhielt er Rotwein?

Gesucht ist folgende Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbf{P}(A_1|B_1) = \frac{\mathbf{P}(B_1|A_1)\mathbf{P}(A_1)}{\mathbf{P}(B_1)} = \frac{0.8 \cdot 0.4}{0.64} = \frac{0.32}{0.64} = 0.5$$

2

Eine Fluggesellschaft hat $C = 500$ Sitzplätze. Sie verkauft 25% mehr Tickets als Sitzplätze. Jedes verkaufte Ticket wird unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.2$ kurzfristig storniert. Sei X die Anzahl der Passagiere, die tatsächlich zum Check-In erscheinen.

7C. Geben Sie die Verteilung von X an.

Wir stellen zunächst fest, dass $X \sim B(625, 0.8)$ verteilt ist.																																																																																																			
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

1

7D. Bestimmen Sie $\mu = \mathbf{E}(X)$ und $\sigma^2 = \mathbf{V}(X)$.

$$\mu = \boxed{500} \qquad \sigma^2 = \boxed{100}$$

2

7E. Bestimmen Sie mithilfe des lokalen Grenzwertsatzes näherungsweise die Wahrscheinlichkeit (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt), dass mehr Passagiere zum Check-in erscheinen als Sitzplätze vorhanden sind. Geben Sie die Grenzen α und β explizit an.

Hinweis: Sie dürfen davon ausgehen, dass $\int_0^x \varphi(t) dt = \frac{1}{2}$ für $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ und $x > 10$.

Wir wenden Satz V3A an. Konkret besagt dieser																																																																																																			
$\sum_{k=a}^b \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\xi + \delta$																																																																																																			
wobei $ \delta < \frac{ 1-2p }{10\sigma} + \frac{1}{3\sigma^2} \leq \frac{1}{6\sigma}$ für $\sigma \geq 5$, $\alpha = (a - 1/2 - \mu)/\sigma$ und $\beta = (b + 1/2 - \mu)/\sigma$. Da X Binomialverteilt ist gilt																																																																																																			
$P(X > 500) = \sum_{k=501}^{625} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)}.$																																																																																																			
Damit ist $a = 501$ und $b = 625$. Dies ergibt für $\alpha = 0.5$ und $\beta = 12.55$. Damit ist $\int_{-\infty}^{\beta} \varphi(t) dt \approx 1$ und $\int_{-\infty}^{\alpha} \varphi(t) dt \approx 0.51994$. Wir folgen $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) dt \approx 0.48$.																																																																																																			

2

7F. Geben Sie eine vernünftige Fehlerschranke δ für die Annäherung an. (Sie können Ihre Antwort als Bruch angeben.)

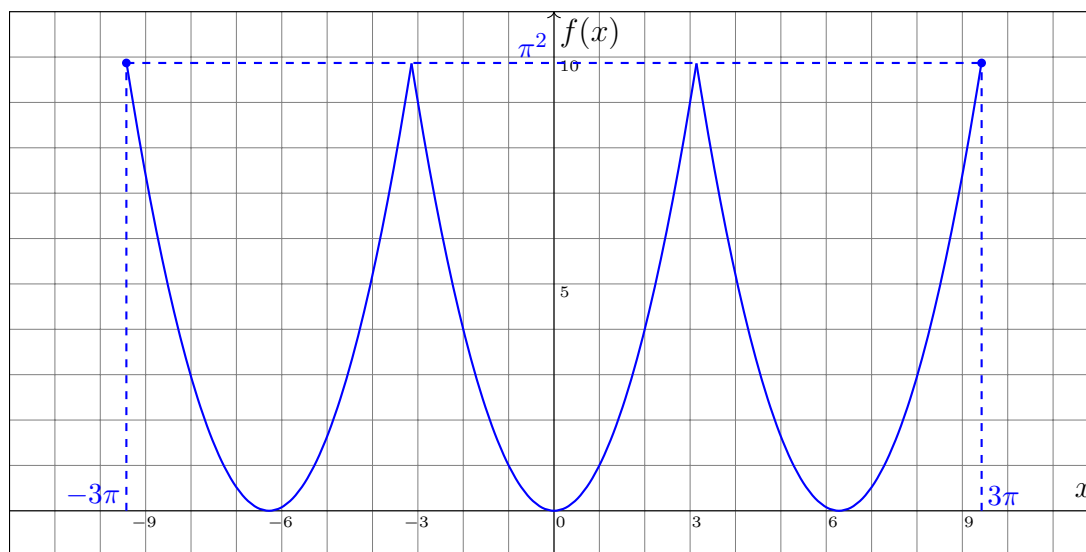
$$|\delta| < \boxed{\frac{1}{60} \text{ oder } \frac{7}{750} \text{ (beide sind OK)}}$$

1

Aufgabe 8. *Fourier-Reihen* (9 Punkte)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2π -periodische Funktion, definiert durch $f(x) = x^2$ für $x \in (-\pi, \pi]$.

8A. Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-3\pi, 3\pi]$:



1

8B. Bestimmen Sie zu f die Koeffizienten der Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

Aus Symmetriegründen gilt $b_k = 0$. Wir haben $T = 2\pi$, damit ergibt sich $\omega = 2\pi/T = 1$. Damit berechnen sich die Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) f(x) dx.$$

Für a_0 erhalten wir damit

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x=-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2.$$

Für die restlichen a_k verwenden wir zweimalige partielle integration

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x^2 \sin(kx)}{k} \right]_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2x \sin(kx)}{k} dx \right) \\ &= -\frac{4}{k\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx \\ &= -\frac{4}{k\pi} \left(\left[-\frac{x \cos(kx)}{k} \right]_{x=0}^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} dx \right) \\ &= \frac{4}{k^2\pi} \left(\pi \cos(\pi k) - \int_0^{\pi} \cos(kx) dx \right) \\ &= \frac{4}{k^2\pi} \left(\pi (-1)^k - \frac{\sin(\pi k)}{k} \right) \\ &= (-1)^k \frac{4}{k^2}. \end{aligned}$$

3

8C. Gegen welchen Wert c genau konvergiert die Fourier-Reihe von f in $x = \pi$?

$$c = \boxed{\pi^2}$$

1

8D. Bestimmen Sie den exakten Wert der Reihe $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Hinweis: Energiegleichung nach Parseval.

Die Parseval Identität besagt $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$. Wir berechnen $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi^4}{5}$ und $\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{\pi^4}{9} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{k^4}$. Damit ergibt sich

$$\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Termumformungen liefern

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

2

8E. Sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2π -periodische Funktion, definiert durch $g(x) = x^3$ für $x \in (-\pi, \pi]$. Leiten Sie aus den vorherigen Ergebnissen die Fourierreihe von g her.

Wir erkennen zuerst $x^3 = 3 \int_0^x t^2 dt = 3 \int_0^x \left(\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kt) \right) dt$. Integrieren liefert nun

$$x^3 = \pi^2 x + 12 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \sin(kx).$$

Damit müssen wir nun nur noch $\pi^2 x$ als Fourierreihe schreiben. Auch hier folgt aus Symmetriegründen, dass alle $a_k = 0$ gilt. Wir berechnen nun

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}.$$

Damit ist die Fourierreihe gegeben durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^{k+1} \left(\frac{\pi^2}{k} - \frac{6}{k^3} \right) \sin(kx).$$

2