

Klausur zur Höheren Mathematik 3

für Ingenieurstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–6** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 7–8** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **07.04.2026** im Campus-System bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1 (2+3+2 = 7 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 8y' + 16y = 6(x - 1)e^{4x}$$

- (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung.
- (b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_p(x)$ von $y'' - 8y' + 16y = 6(x - 1)e^{4x}$.
Liegt hierbei der Resonanzfall vor?
- (c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'' - 8y' + 16y = 6(x - 1)e^{4x}$ mit den Anfangswerten $y(0) = 3$, $y'(0) = 6$.

Lösung.

- (a) Das charakteristische Polynom ist $p(X) = X^2 - 8X + 16 = (X - 4)^2$.

Das zugehörige Fundamentalsystem ist gegeben durch:

$$f_1(x) = e^{4x}, \quad f_2(x) = xe^{4x}.$$

- (b) Die rechte Seite der Gleichung hat die Form $r(x)e^{\mu x}$, wobei $r(x) = 6(x - 1)$ ein Polynom von Grad 1 und $\mu = 4$ ist.

Da μ eine Nullstelle von $p(X)$ mit Vielfachheit 2 ist, befinden wir uns im Resonanzfall. Wir setzen daher an:

$$f_p(x) = (s_1x + s_0)x^2e^{4x} = (s_1x^3 + s_0x^2)e^{4x}$$

Es ist $p(D + 4) = ((D + 4) - 4)^2 = D^2$.

Einsetzen von $f_p(x)$ in die Differentialgleichung gibt

$$\begin{aligned} 6(x - 1)e^{4x} &\stackrel{!}{=} f_p''(x) - 8f_p'(x) + 16f_p(x) \\ &= p(D)(f_p(x)) \\ &= p(D)(e^{4x} \cdot (s_1x^3 + s_0x^2)) \\ &= e^{4x} \cdot p(D + 4)(s_1x^3 + s_0x^2) \\ &= e^{4x} \cdot D^2(s_1x^3 + s_0x^2) \\ &= e^{4x} \cdot (6s_1x + 2s_0). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich gibt $s_1 = 1$ und $s_0 = -3$.

Somit ist $f_p(x) = (x^3 - 3x^2)e^{4x}$ eine partikuläre Lösung.

Alternative Lösung nach Ansatz bei (b).

Wir berechnen die Ableitungen des Ansatzes $f_p(x) = (s_1 x^3 + s_0 x^2) e^{4x}$ bis zur zweiten Ordnung:

$$\begin{aligned} f_p'(x) &= (3s_1 x^2 + 2s_0 x) e^{4x} + 4(s_1 x^3 + s_0 x^2) e^{4x} = e^{4x} (4s_1 x^3 + (3s_1 + 4s_0)x^2 + 2s_0 x) \\ f_p''(x) &= 4e^{4x} (4s_1 x^3 + (3s_1 + 4s_0)x^2 + 2s_0 x) + e^{4x} (12s_1 x^2 + 2(3s_1 + 4s_0)x + 2s_0) \\ &= e^{4x} (16s_1 x^3 + (24s_1 + 16s_0)x^2 + (6s_1 + 16s_0)x + 2s_0) . \end{aligned}$$

Wir setzen in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned} (6x - 6)e^{4x} &\stackrel{!}{=} e^{4x} (16s_1 x^3 + (24s_1 + 16s_0)x^2 + (6s_1 + 16s_0)x + 2s_0) \\ &\quad - 8e^{4x} (4s_1 x^3 + (3s_1 + 4s_0)x^2 + 2s_0 x) + 16(s_1 x^3 + s_0 x^2) e^{4x} \\ &= e^{4x} (6s_1 x + 2s_0) \end{aligned}$$

Gelten soll also: $6s_1 x + 2s_0 \stackrel{!}{=} 6x - 6$.

Koeffizientenvergleich liefert $s_1 = 1$ und $s_0 = -3$.

Somit ist $f_p(x) = (x^3 - 3x^2)e^{4x}$ eine partikuläre Lösung.

Alternative Lösung zu (b): Variation der Konstanten.

Mit (a) erhalten wir die Wronski-Matrix

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{4x} & x e^{4x} \\ 4e^{4x} & (4x + 1)e^{4x} \end{pmatrix}$$

und ihre Inverse

$$\begin{aligned} W(x)^{-1} &= \frac{1}{e^{4x} \cdot (4x + 1)e^{4x} - 4e^{4x} \cdot x e^{4x}} \begin{pmatrix} (4x + 1)e^{4x} & -x e^{4x} \\ -4e^{4x} & e^{4x} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{e^{8x}} \begin{pmatrix} (4x + 1)e^{4x} & -x e^{4x} \\ -4e^{4x} & e^{4x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (4x + 1)e^{-4x} & -x e^{-4x} \\ -4e^{-4x} & e^{-4x} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Wir bestimmen eine partikuläre Lösung mit dem Ansatz $f_p(x) = d_1(x)f_1(x) + d_2(x)f_2(x)$. Hierzu wird

$$\begin{pmatrix} d_1'(x) \\ d_2'(x) \end{pmatrix} = W(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 6(x-1)e^{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4x+1)e^{-4x} & -x e^{-4x} \\ -4e^{-4x} & e^{-4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6(x-1)e^{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x^2+6x \\ 6x-6 \end{pmatrix} .$$

Somit können wir Stammfunktionen $d_1(x) = -2x^3 + 3x^2$ und $d_2(x) = 3x^2 - 6x$ wählen. Wir erhalten die partikuläre Lösung

$$f_p(x) = (-2x^3 + 3x^2)e^{4x} + (3x^2 - 6x)xe^{4x} = (x^3 - 3x^2)e^{4x} .$$

(c) Jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form

$$f(x) = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x} + (x^3 - 3x^2) e^{4x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Es gilt also

$$f'(x) = 4c_1 e^{4x} + (4c_2 x + c_2) e^{4x} + (4x^3 - 9x^2 - 6x) e^{4x}$$

und damit

$$f(0) = c_1 \stackrel{!}{=} 3$$

$$f'(0) = 4c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 6$$

Aus der ersten Gleichung folgt $c_1 = 3$. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert $c_2 = -6$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$f(x) = 3e^{4x} - 6xe^{4x} + (x^3 - 3x^2)e^{4x}$$

Aufgabe 2 (2+6 = 8 Punkte)

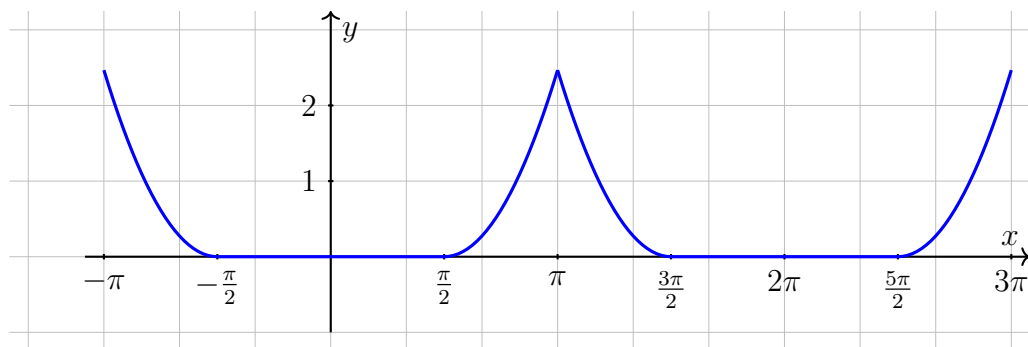
Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die gerade 2π -periodische Funktion, die für $0 \leq x \leq \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ (x - \frac{\pi}{2})^2 & \text{falls } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

- (a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[-\pi, 3\pi]$. Verwenden Sie hierbei die Näherung $\frac{\pi^2}{4} \approx 2,5$.
- (b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

Lösung.

- (a) Skizze des Graphen von $f(x)$:



- (b) Es ist $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da f gerade ist.

Für $n = 0$ ist

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi (x - \frac{\pi}{2})^2 \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{3} (x - \frac{\pi}{2})^3 \right]_{\pi/2}^\pi \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^3}{24} - 0 \right) \\ &= \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

Wir erhalten für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \cos(nx) \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{n} \sin(nx) \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{n} \sin(nx) \, dx \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left((0 - 0) - \frac{2}{n} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin(nx) \, dx \right) \\
 &= -\frac{4}{n\pi} \left(\left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \left(-\frac{1}{n} \cos(nx)\right) \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi -\frac{1}{n} \cos(nx) \, dx \right) \\
 &= -\frac{4}{n\pi} \left(-\frac{\pi}{2n} \cos(n\pi) - 0 - \left[-\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sin(nx) \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \right) \\
 &= -\frac{4}{n\pi} \left(-\frac{\pi}{2n} (-1)^n - \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \\
 &= \frac{2}{n^2} (-1)^n + \frac{4}{\pi n^3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Somit ist die Fourier-Reihe von $f(x)$ gegeben durch

$$\text{Fourier}_f(x) = \frac{\pi^2}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2} (-1)^n + \frac{4}{\pi n^3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \cos(nx).$$

Aufgabe 3 (2+1+1 = 4 Punkte) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = 2e^{-\frac{1}{2}t}$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Sei $f(t)$ die gesuchte Lösung dieses Anfangswertproblems.

Wir schreiben $g(t) := 2e^{-\frac{1}{2}t}$. Sei $p(X)$ das charakteristische Polynom von $y'' + y' + \frac{5}{4}y = 0$.

- Bestimmen Sie $U(s) = \frac{1}{p(s)}$. Führen Sie eine quadratische Ergänzung des Nenners durch. Bestimmen Sie damit $u(t) = \mathcal{L}^{-1}(U(s))$.
- Bestimmen Sie $f(t)$ als Faltung: $f(t) = u(t) * g(t)$.
- Überprüfen Sie Ihre Lösung aus (b) durch Einsetzen in die betrachtete Differentialgleichung.

Lösung.

- Wir bestimmen das charakteristische Polynom der Differentialgleichung und ergänzen es quadratisch.

$$p(X) = X^2 + X + \frac{5}{4} = (X + \frac{1}{2})^2 + 1$$

Mit

$$U(s) = \frac{1}{p(s)} = \frac{1}{s^2 + s + \frac{5}{4}} = \frac{1}{(s + \frac{1}{2})^2 + 1}$$

wird

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s + \frac{1}{2})^2 + 1}\right) = e^{-\frac{1}{2}t} \sin(t).$$

- Es wird

$$\begin{aligned} f(t) &= (u * g)(t) \\ &= (g * u)(t) \\ &= \int_0^t 2e^{-\frac{1}{2}(t-x)} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \sin(x) \, dx \\ &= 2e^{-\frac{1}{2}t} \int_0^t \sin(x) \, dx \\ &= 2e^{-\frac{1}{2}t} [-\cos(x)]_0^t \\ &= -2e^{-\frac{1}{2}t} \cos(t) + 2e^{-\frac{1}{2}t} \\ &= 2e^{-\frac{1}{2}t}(1 - \cos(t)). \end{aligned}$$

(c) Es ist $p(X) = (X + \frac{1}{2})^2 + 1$ und also $p(X - \frac{1}{2}) = X^2 + 1$. Mit Heaviside wird

$$\begin{aligned} f''(t) + f'(t) + \frac{5}{4}f(t) &= p(D)(f(t)) \\ &= p(D)(2e^{-\frac{1}{2}t}(1 - \cos(t))) \\ &= e^{-\frac{1}{2}t}p(D - \frac{1}{2})(2 - 2\cos(t)) \\ &= e^{-\frac{1}{2}t}(D^2 + 1)(2 - 2\cos(t)) \\ &= e^{-\frac{1}{2}t}(2\cos(t) + 2 - 2\cos(t)) \\ &= 2e^{-\frac{1}{2}t}. \end{aligned}$$

Dies ist in der Tat die rechte Seite der Differentialgleichung.

Aufgabe 4 (1+1+3+1 = 6 Punkte)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Es ist $\begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $3i$.

- (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.
- (b) Geben Sie die Wronski-Matrix $W_{\text{sys}}(x)$ an und bestimmen Sie die Inverse $W_{\text{sys}}(x)^{-1}$.
- (c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_p(x)$ von $y' = Ay + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- (d) Bestimmen Sie alle Lösungen von $y' = Ay + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung.

- (a) Wir schreiben $3i = 0 + 3i$ und

$$\begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ergeben sich die linear unabhängigen Lösungen

$$f_{[1]}(x) = e^0(\cos(3x) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(3x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \cos(3x) \\ -\sin(3x) \end{pmatrix},$$

$$f_{[2]}(x) = e^0(\sin(3x) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(3x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \sin(3x) \\ \cos(3x) \end{pmatrix}.$$

- (b) Es ist

$$W_{\text{sys}}(x) = (f_{[1]}(x), f_{[2]}(x)) = \begin{pmatrix} 3 \cos(3x) & 3 \sin(3x) \\ -\sin(3x) & \cos(3x) \end{pmatrix}$$

und

$$W_{\text{sys}}(x)^{-1} = \frac{1}{3 \cos(3x)^2 + 3 \sin(3x)^2} \begin{pmatrix} \cos(3x) & -3 \sin(3x) \\ \sin(3x) & 3 \cos(3x) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos(3x) & -3 \sin(3x) \\ \sin(3x) & 3 \cos(3x) \end{pmatrix}.$$

Alternative Lösung: Es ist

$$W_{\text{sys}}(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
 W_{\text{sys}}(x)^{-1} &= W_{\text{sys}}(0)^{-1} W_{\text{sys}}(-x) W_{\text{sys}}(0)^{-1} \\
 &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \cos(-3x) & 3 \sin(-3x) \\ -\sin(-3x) & \cos(-3x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \cos(3x) & -3 \sin(3x) \\ \sin(3x) & \cos(3x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \cos(3x) & -9 \sin(3x) \\ \sin(3x) & 3 \cos(3x) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos(3x) & -3 \sin(3x) \\ \sin(3x) & 3 \cos(3x) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

(c) Ansatz mit Variation der Konstanten: $f_p(x) = c_1(x)f_{[1]}(x) + c_2(x)f_{[2]}(x)$.

Es ist

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} &= W_{\text{sys}}(x)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos(3x) & -3 \sin(3x) \\ \sin(3x) & 3 \cos(3x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 \cos(3x) \\ 2 \sin(3x) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Somit können wir $c_1(x) = \frac{2}{3} \sin(3x)$ und $c_2(x) = -\frac{2}{3} \cos(3x)$ wählen.

Damit folgt

$$f_p(x) = \frac{2}{3} \sin(3x) \begin{pmatrix} 3 \cos(3x) \\ -\sin(3x) \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \cos(3x) \begin{pmatrix} 3 \sin(3x) \\ \cos(3x) \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) Jede Lösung von $y' = Ay + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist von der Form

$$f(x) = \underbrace{-\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f_p(x)} + \underbrace{d_1 \begin{pmatrix} 3 \cos(3x) \\ -\sin(3x) \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 3 \sin(3x) \\ \cos(3x) \end{pmatrix}}_{f_h(x)},$$

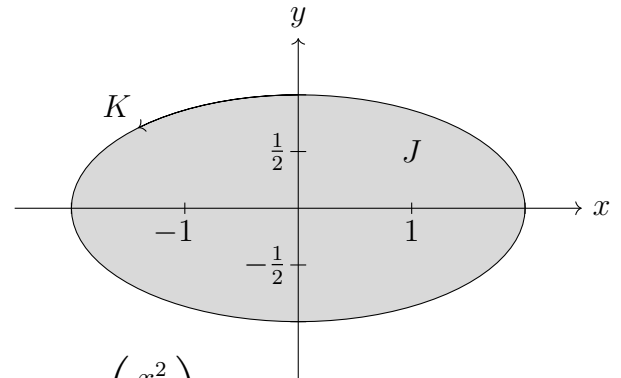
wobei $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 (2+2 = 4 Punkte)

Wir betrachten das rechts dargestellte Gebiet J und die geschlossene Kurve K , die J berandet.

Es wird K parametrisiert durch

$$C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto C(t) := \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$



Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

- (a) Bestimmen Sie den Ausfluss $A(g, K)$ als Kurvenintegral.
- (b) Berechnen Sie $\operatorname{div}(g)$. Bestätigen Sie hiermit das Ergebnis aus (a).

Lösung.

- (a) Der Ausfluss wird wie folgt berechnet.

$$\begin{aligned} A(g, K) &= \int_0^{2\pi} g(C(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_2(t) \\ -C'_1(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(t)^2 \\ 2 \cos(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2 \sin(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin(t)^2 \cos(t) + 4 \sin(t) \cos(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin(t)^2 + 4 \sin(t)) \cos(t) dt \\ &\stackrel{\substack{u = \sin(t) \\ du = \cos(t) dt}}{=} \int_{\sin(0)}^{\sin(2\pi)} u^2 + 4u du \\ &= \int_0^0 u^2 + 4u du \\ &= 0. \end{aligned}$$

- (b) Die Divergenz von g ist

$$\operatorname{div}(g) = \frac{\partial}{\partial x_1} x_2^2 + \frac{\partial}{\partial x_2} x_1 = 0.$$

Da $\operatorname{div}(g) = 0$ ist, ist auch $\iint_J \operatorname{div}(g) dx_1 dx_2 = 0$.

Der Satz von Gauß sagt aus:

$$A(g, K) = \iint_J \operatorname{div}(g) dx_1 dx_2$$

Dies bestätigt das Ergebnis $A(g, K) = 0$ aus (a).

Aufgabe 6 (2+3 = 5 Punkte)

Sei $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \psi(u, v, \varphi) := \begin{pmatrix} u \cos(\varphi) \\ u \sin(\varphi) \\ uv \end{pmatrix}$.

Sei $B := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \mid 1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$.

Sei $D := \psi(B) \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie $|\det(J\psi(u, v, \varphi))|$.

(b) Berechnen Sie

$$\iiint_D 4x + 4z \, dx \, dy \, dz$$

unter Verwendung von ψ und der Transformationsformel.

Lösung.

(a) Die Jacobi-Matrix wird

$$J\psi(u, v, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -u \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & u \cos(\varphi) \\ v & u & 0 \end{pmatrix}.$$

Entwickeln nach der zweiten Spalte gibt

$$\det(J\psi(u, v, \varphi)) = (-1) \cdot u \cdot \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -u \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & u \cos(\varphi) \end{pmatrix} = -u \cdot (u \cos(\varphi)^2 + u \sin(\varphi)^2) = -u^2.$$

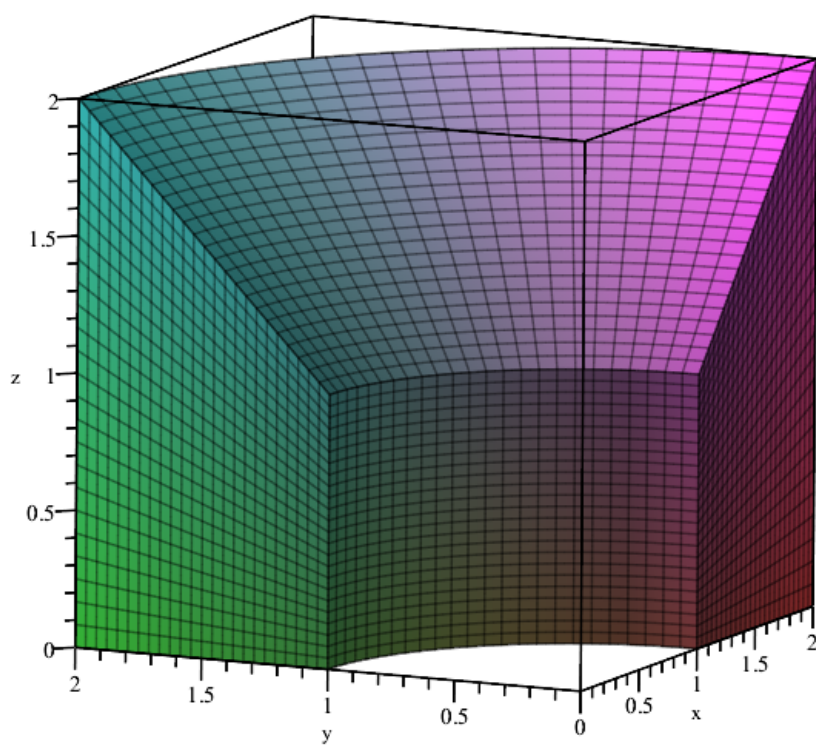
Also ist

$$|\det(J\psi(u, v, \varphi))| = u^2.$$

(b) Mittels ψ und der Transformationsformel wird

$$\begin{aligned} \iiint_D 4x + 4z \, dx \, dy \, dz &= \iiint_B (4u \cos(\varphi) + 4uv) \cdot u^2 \, du \, dv \, d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{v=0}^1 \int_{u=1}^2 4u^3 \cos(\varphi) + 4u^3 v \, du \, dv \, d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{v=0}^1 [u^4 \cos(\varphi) + u^4 v]_{u=1}^{u=2} \, dv \, d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{v=0}^1 15 \cos(\varphi) + 15v \, dv \, d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} [15 \cos(\varphi) v + \frac{15}{2} v^2]_{v=0}^{v=1} \, d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} 15 \cos(\varphi) + \frac{15}{2} \, d\varphi \\ &= [15 \sin(\varphi) + \frac{15}{2} \varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 15 + \frac{15\pi}{4}. \end{aligned}$$

Nicht verlangt: Skizze von $D = \psi(B)$.



Bitte wenden →

Name,
Vorname:

Matrikel-
nummer:

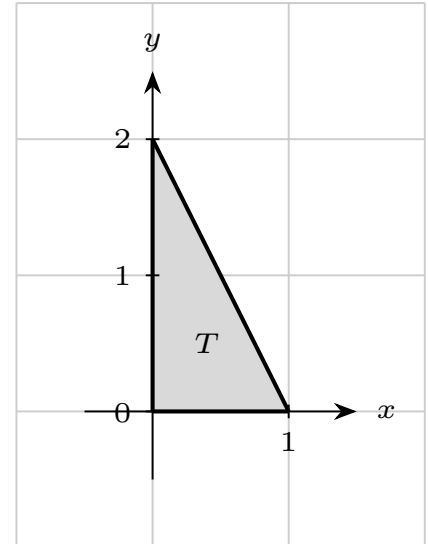
Aufgabe 7 (1+1+1 = 3 Punkte) Sei $T \subseteq \mathbb{R}^2$ wie in der Skizze rechts dargestellt.

(a) Stellen Sie T als Normalbereich bezüglich der x -Achse dar.

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - 2x \right\}$$

(b) Stellen Sie T als Normalbereich bezüglich der y -Achse dar.

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{2}y \right\}$$



(c) Berechnen Sie

$$\iint_T 2 + 2x \, dx \, dy =$$

$$\frac{8}{3}$$

Aufgabe 8 (3 Punkte)

Bestimmen Sie $c > 0$ und Funktionen f, g so, dass das Anfangswertproblem

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

die Lösung

$$u(x, t) = \frac{x}{2} + \frac{1}{6} (\cos(x + 3t) - \cos(x - 3t))$$

hat.

$$f(x) =$$

$$\frac{x}{2}$$

$$g(x) =$$

$$-\sin(x)$$

$$c =$$

$$3$$