

Aufgabe 1 (Mehrdimensionale Integration) [1 + 3 = 4 Punkte].

Der Normalbereich $N \subset \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$N := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

wobei $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x, & \text{falls } x \leq 3, \\ 4 - x, & \text{falls } x > 3. \end{cases}$$

- Zeichnen Sie N in ein Koordinatensystem.
- Berechnen Sie die Koordinate x_S des Schwerpunktes $(x_S, y_S)^T \in \mathbb{R}^2$ von N , bei einer konstanten Massendichte $\rho \equiv 1$.

Aufgabe 2 (Transformationssatz) [3 Punkte].

Für $a, b > 0$ sei die Ellipsenscheibe $E \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$E := \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Geben Sie eine Transformation von der Einheitskreisscheibe $S \subset \mathbb{R}^2$ auf E an und verwenden Sie den Transformationssatz, um den Flächeninhalt von E in Abhängigkeit von a, b zu bestimmen. Sie können hierbei ohne Beweis verwenden, dass die Einheitskreisscheibe einen Flächeninhalt von π besitzt.

Aufgabe 3 (Integralsätze) [4 + 6 = 10 Punkte].

- Gegeben sei das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y)^T \mapsto \begin{pmatrix} \sin(\cos^3(y)) + 2xy^2 \\ 5x + 2x^2y \end{pmatrix}$$

sowie die Randkurve $C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $C(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$. Berechnen Sie

$$\int_C \langle f, \mathbf{n} \rangle d\mathbf{x},$$

wobei $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$ den äußeren Einheitsnormalenvektor bezeichnet.

- Gegeben sei das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z)^T \mapsto (-y, x, 1)^T$$

sowie die Fläche

$$F := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x = r\cos(\varphi), y = r\sin(\varphi), z = r\cos^2(\varphi), 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Weiter sei mit C eine C^1 -Kurve bezeichnet, die den Rand ∂F von F parametrisiert und so orientiert sei, dass $n(C(t)) \times C'(t)$ in Richtung der Fläche zeigt. Berechnen Sie

$$\oint_C \langle f(\mathbf{x}), d\mathbf{x} \rangle.$$

Aufgabe 4 (Fourierreihen) [7 + 4 = 11 Punkte].

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2π -periodische Fortsetzung der Funktion $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, mit $g(x) = x^2$.

- Bestimmen Sie die Fourierreihe von f . Sie können hierbei folgende Tatsache ohne Beweis verwenden: Für jede reelle Zahl β gilt

$$\int x^2 \cos(\beta x) dx = \frac{x^2 \sin(\beta x)}{\beta} - \frac{2 \sin(\beta x)}{\beta^3} + \frac{2x \cos(\beta x)}{\beta^2} + C.$$

- Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2(k\pi)}{k^4}.$$

Aufgabe 5 (Differentialgleichungen) [3 + 3 = 6 Punkte].

- a) Bestimmen Sie die Lösung
- $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$
- des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \frac{2e^{2t}}{y(t)}, \quad y(0) = \sqrt{2}.$$

- b) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -4y_1(t) + 2y_2(t), \\ y_2'(t) &= -2y_2(t), \end{aligned}$$

und geben Sie die allgemeine reelle Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe 6 (Laplace-Transformation) [2 + 3 + 1 = 6 Punkte].

Die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(t) := te^{-3t}.$$

- a) Bestimmen Sie die exponentielle Ordnung $\gamma \in \mathbb{R}$ von f und geben Sie zudem den maximalen Definitionsbereich der Laplace-Transformierten $\mathcal{L}(f)$ von f an.
- b) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f)$ von f .
- c) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f')$ von f' .

Aufgabe 7 (Funktionentheorie) [6 + 2 = 8 Punkte].

- a) Bestimmen Sie alle Punkte $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, in denen die Funktion $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$, wobei $\bar{z}$ das komplexe Konjugat von z bezeichnet, komplex differenzierbar ist.
- b) Gegeben sei die Kurve $C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \frac{1}{2} + i\pi(t-1)$. Berechnen Sie

$$\int_C e^z dz.$$

Aufgabe 8 (Komplexe Integration) [2 + 2 + 2 = 6 Punkte].

Berechnen Sie die folgenden Integrale, wobei die Kreistrnder mit der Standardparametrisierung, d.h. gegen den Uhrzeigersinn, parametrisiert sind:

- a) $\int_{\partial B_R(1)} e^z z^n dz$, fur $R > 0$ und $n \in \mathbb{N}$,
- b) $\int_{\partial B_2(0)} \frac{1}{(z-1)(z-(1+4i))} dz$,
- c) $\int_{\partial B_1(0)} \frac{\sin(z)}{z^4} dz$.

Aufgabe 9 (Uneigentliches reelles Integral) [3 + 3 = 6 Punkte].

Ziel ist die Berechnung des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - e^{\frac{2}{3}\pi i})(x - (e^{\frac{2}{3}\pi i} - 4i))} dx.$$

Gehen Sie hierzu in den folgenden Schritten vor:

- a) Berechnen Sie die Residuen des gegebenen Integranden an allen Polstellen.
- b) Berechnen Sie das gesuchte Integral und begrunden Sie Ihr Vorgehen.