

Aufgabe 1 (Mehrdimensionale Integration) [1 + 3 = 4 Punkte].

Der Normalbereich $N \subset \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$N := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

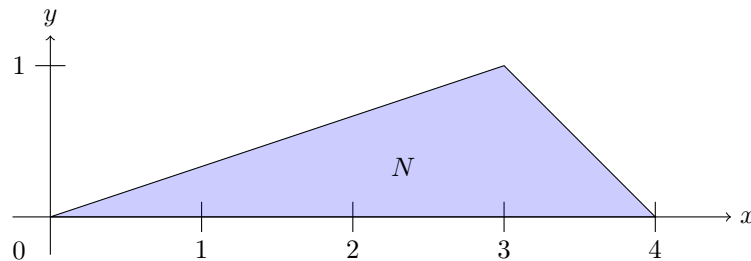
wobei $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x, & \text{falls } x \leq 3, \\ 4 - x, & \text{falls } x > 3. \end{cases}$$

- Zeichnen Sie N in ein Koordinatensystem.
- Berechnen Sie die Koordinate x_S des Schwerpunktes $(x_S, y_S)^T \in \mathbb{R}^2$ von N , bei einer konstanten Massendichte $\rho \equiv 1$.

Lösung

- Der Normalbereich sieht in einem Koordinatensystem wie folgt aus:



- Die x_S Koordinate des Schwerpunkts ist gegeben durch

$$x_S = \frac{\int_N x \, d\mathbf{x}}{\int_N 1 \, d\mathbf{x}}.$$

Wir berechnen den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} \text{vol}(N) &= \int_N 1 \, d(x, y) = \int_0^4 \int_0^{f(x)} 1 \, dy \, dx = \int_0^4 f(x) \, dx \\ &= \int_0^3 \frac{1}{3}x \, dx + \int_3^4 4 - x \, dx \\ &= 2. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun das Integral

$$\begin{aligned} \int_N x \, d(x, y) &= \int_0^4 \int_0^{f(x)} x \, dy \, dx = \int_0^4 x f(x) \, dx \\ &= \int_0^3 \frac{1}{3}x^2 \, dx + \int_3^4 4x - x^2 \, dx \\ &= \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Damit ist also

$$x_S = \frac{\frac{14}{3}}{2} = \frac{7}{3}.$$

Aufgabe 2 (Transformationssatz) [3 Punkte].

Für $a, b > 0$ sei die Ellipsenscheibe $E \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$E := \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Geben Sie eine Transformation von der Einheitskreisscheibe $S \subset \mathbb{R}^2$ auf E an und verwenden Sie den Transformationssatz, um den Flächeninhalt von E in Abhängigkeit von a, b zu bestimmen. Sie können hierbei ohne Beweis verwenden, dass die Einheitskreisscheibe einen Flächeninhalt von π besitzt.

Lösung

Wir definieren die Abbildung

$$\Phi : S \rightarrow E, (x, y)^T \mapsto (ax, by)^T.$$

Die Jacobi-Matrix von Φ lautet

$$D\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

und somit ist

$$|\det D\Phi(x, y)| = ab.$$

Mit dem Transformationssatz erhalten wir also

$$\text{vol}(E) = \int_E d(x, y) = \int_S ab d(x, y) = ab \int_S d(x, y) = \pi ab.$$

Aufgabe 3 (Integralsätze) [4 + 6 = 10 Punkte].

a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y)^T \mapsto \begin{pmatrix} \sin(\cos^3(y)) + 2xy^2 \\ 5x + 2x^2y \end{pmatrix}$$

sowie die Randkurve $C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $C(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$. Berechnen Sie

$$\int_C \langle f, \mathbf{n} \rangle d\mathbf{x},$$

wobei $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$ den äußeren Einheitsnormalenvektor bezeichnet.

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z)^T \mapsto (-y, x, 1)^T$$

sowie die Fläche

$$F := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x = r\cos(\varphi), y = r\sin(\varphi), z = r\cos^2(\varphi), 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Weiter sei mit C eine C^1 -Kurve bezeichnet, die den Rand ∂F von F parametrisiert und so orientiert sei, dass $n(C(t)) \times C'(t)$ in Richtung der Fläche zeigt. Berechnen Sie

$$\oint_C \langle f(\mathbf{x}), d\mathbf{x} \rangle.$$

Lösung

a) Mit dem Gauß'schen Integralsatz gilt

$$\int_C \langle f, \mathbf{n} \rangle d\mathbf{x} = \int_D \operatorname{div} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Die Divergenz ist gegeben durch

$$\operatorname{div}(f)(x, y) = 2y^2 + 2x^2 = 2(x^2 + y^2).$$

Wir berechnen das entsprechende Integral in Polarkoordinaten und erhalten

$$\begin{aligned} \int_D 2(x^2 + y^2) d(x, y) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r^2 \cdot r d\varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^1 2r^3 dr \\ &= \pi. \end{aligned}$$

b) Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\oint_C \langle f(\mathbf{x}), d\mathbf{x} \rangle = \int_F \langle \operatorname{rot}(f), \mathbf{n} \rangle d\sigma,$$

wobei n das äußere Einheitsnormalenfeld bezeichnet.

Wir berechnen zuerst

$$\operatorname{rot}(f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir parametrisieren die Fläche F via

$$p : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), r\cos^2(\varphi))^T.$$

Dann berechnen wir

$$\mathbf{n} = \frac{\partial p}{\partial r} \times \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\cos(\varphi)(\cos^2(\varphi) + 2\sin^2(\varphi)) \\ r\sin(\varphi)\cos^2(\varphi) \\ r \end{pmatrix}.$$

Also erhalten wir schlussendlich

$$\begin{aligned} \int_F \langle \operatorname{rot}(f), \mathbf{n} \rangle d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r\cos(\varphi)(\cos^2(\varphi) + 2\sin^2(\varphi)) \\ r\sin(\varphi)\cos^2(\varphi) \\ r \end{pmatrix} \right\rangle dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 2r dr \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Fourierreihen) [7 + 4 = 11 Punkte].

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2π -periodische Fortsetzung der Funktion $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, mit $g(x) = x^2$.

a) Bestimmen Sie die Fourierreihe von f . Sie können hierbei folgende Tatsache ohne Beweis verwenden:
Für jede reelle Zahl β gilt

$$\int x^2 \cos(\beta x) dx = \frac{x^2 \sin(\beta x)}{\beta} - \frac{2 \sin(\beta x)}{\beta^3} + \frac{2x \cos(\beta x)}{\beta^2} + C.$$

b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2(k\pi)}{k^4}.$$

Lösung

a) Da f per Definition eine gerade Funktion ist, gilt $b_k = 0$ für alle $k \geq 1$.
Zudem ist die Periode von f genau $T = 2\pi$ sowie $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$. Weiter gilt für $k \geq 1$, dass

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(kt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2 \sin(kt)}{k} - \frac{2t \sin(kt)}{k^3} + \frac{2t \cos(kt)}{k^2} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(0 + 0 + \frac{2\pi \cos(k\pi)}{k^2} + \frac{2\pi \cos(-k\pi)}{k^2} \right) \\ &= \frac{2}{k^2} (\cos(k\pi) + \cos(-k\pi)) \\ &= \frac{4}{k^2} \cos(k\pi) = (-1)^k \frac{4}{k^2}. \end{aligned}$$

Für $k = 0$ hingegeben haben wir

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Die Fourierreihe von f lautet somit

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{k^2} \cos(kt).$$

b) Mit Parseval gilt

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k \in \mathbb{N}} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt.$$

Damit ist dann

$$\frac{2\pi^4}{9} + 16 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2(k\pi)}{k^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt.$$

Es ist

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{2}{5} \pi^4.$$

Umstellen liefert

$$16 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2(k\pi)}{k^4} = \pi^4 \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9} \right) = \frac{8\pi^4}{45}$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2(k\pi)}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Aufgabe 5 (Differentialgleichungen) [3 + 3 = 6 Punkte].

- a) Bestimmen Sie die Lösung
- $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$
- des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \frac{2e^{2t}}{y(t)}, \quad y(0) = \sqrt{2}.$$

- b) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -4y_1(t) + 2y_2(t), \\ y_2'(t) &= -2y_2(t), \end{aligned}$$

und geben Sie die allgemeine reelle Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ an.

Lösung

- a) Wir lösen die DGL mit dem Separationsansatz und erhalten die Lösung
- y
- als Lösung der Gleichung

$$\int_0^t y'(\tau)y(\tau) d\tau = \int_0^t 2e^{2\tau} d\tau.$$

Wir lösen zunächst das linke Integral mit der Substitution $u = y$, womit wir das folgende erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^t y'(\tau)y(\tau) d\tau &= \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{y'(\tau)}{y(\tau)} u du \\ &= \frac{1}{2}(y^2(t) - y^2(0)) = \frac{1}{2}y^2(t) - 1, \end{aligned}$$

wobei wir den Anfangswert eingesetzt haben. Für die rechte Seite gilt

$$\int_0^t 2e^{2\tau} d\tau = e^{2t} - 1.$$

Umstellen liefert

$$y(t) = \sqrt{2}e^t.$$

- b) Wir schreiben das System in der Form
- $y'(t) = Ay(t)$
- mit

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen zunächst die Eigenwerte von A . Hierfür stellen wir das charakteristische Polynom χ von A auf:

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -4 - \lambda & 2 \\ 0 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = (4 + \lambda)(2 + \lambda).$$

Die Nullstellen von p sind also $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = -2$. Zur Berechnung eines Eigenvektors v_1 zu λ_1 lösen wir

$$(A - \lambda_1 I) \cdot v_1 = 0$$

was äquivalent ist zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und wählen $v_1 = (1, 0)^T$. Analog erhalten wir v_2 als

$$(A - \lambda_2 I) \cdot v_2 = 0$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und wählen somit $v_2 = (1, 1)^T$.

Also ist ein reelles Fundamentalsystem gegeben durch

$$\left\{ e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 6 (Laplace-Transformation) [2 + 3 + 1 = 6 Punkte].

Die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(t) := te^{-3t}.$$

- Bestimmen Sie die exponentielle Ordnung $\gamma \in \mathbb{R}$ von f und geben Sie zudem den maximalen Definitionsbereich der Laplace-Transformierten $\mathcal{L}(f)$ von f an.
- Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f)$ von f .
- Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f')$ von f' .

Lösung

- Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für jedes $\alpha > 0$ ein M existiert, sodass

$$|t| \leq Me^{\alpha t}$$

für alle $t > 0$. Sei also nun $\alpha > 0$ beliebig aber fest. Dann ist

$$|te^{-3t}| \leq Me^{\gamma t} e^{-3t} = Me^{(\gamma-3)t}.$$

Somit ist die Funktion f von exponentieller Ordnung γ für jedes $\gamma > -3$.

Damit ist die Laplace-Transformierte definiert auf

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > -3\}.$$

- Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > -3$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(z) &= \int_0^\infty te^{-3t} e^{-zt} dt \\ &= \int_0^\infty te^{-(3+z)t} dt \\ &= -\frac{1}{3+z} te^{-(3+z)t} \Big|_0^\infty + \frac{1}{3+z} \int_0^\infty e^{-(3+z)t} dt \\ &= -\frac{1}{(3+z)^2} e^{-(3+z)t} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{(3+z)^2}. \end{aligned}$$

- Da f differenzierbar ist, erhalten wir mit den Differentiationsregeln für die Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}(f)(z) = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0) = \frac{z}{(3+z)^2}.$$

Aufgabe 7 (Funktionentheorie) [6 + 2 = 8 Punkte].

- a) Bestimmen Sie alle Punkte $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, in denen die Funktion $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$, wobei $\bar{z}$ das komplexe Konjugat von z bezeichnet, komplex differenzierbar ist.
- b) Gegeben sei die Kurve $C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \frac{1}{2} + i\pi(t-1)$. Berechnen Sie

$$\int_C e^z dz.$$

Lösung

- a) Wir prüfen die komplexe Differenzierbarkeit mithilfe der Cauchy-Riemann-DGL, das heißt

$$\begin{aligned}\partial_x u &= \partial_y v, \\ \partial_x v &= -\partial_y u.\end{aligned}$$

Es ist

$$g(x + iy) = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2} =: u(x, y) + iv(x, y).$$

Es ist

$$\begin{aligned}\partial_x u(x, y) &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \partial_y u(x, y) &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \partial_x v(x, y) &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \partial_y v(x, y) &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \stackrel{!}{=} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

also $x^2 = y^2$ was entsprechend $x = \pm y$ bedeutet.

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \stackrel{!}{=} \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

was entsprechend $xy = 0$, also $x = 0$ oder $y = 0$ bedeutet

Beide Bedingungen zusammen liefern also $x = y = 0$, damit sind die CR-DGL nirgends im zulässigen Gebiet erfüllt und g ist in keinem Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex differenzierbar.

- b) Wir berechnen das Kurvenintegral auf direktem Wege. Es ist

$$C'(t) = i\pi.$$

Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}\int_C e^z dz &= \int_0^1 e^{C(t)} C'(t) dt \\ &= \int_0^1 e^{\frac{1}{2} + i\pi(t-1)} i\pi dt = i\pi e^{\frac{1}{2} - i\pi} \int_0^1 e^{i\pi t} dt \\ &= i\pi e^{\frac{1}{2} - i\pi} \left[\frac{1}{i\pi} e^{i\pi t} \right]_{t=0}^{t=1} \\ &= e^{\frac{1}{2} - i\pi} (e^{i\pi} - 1) \\ &= 2e^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Aufgabe 8 (Komplexe Integration) [2 + 2 + 2 = 6 Punkte].

Berechnen Sie die folgenden Integrale, wobei die Kreisträger mit der Standardparametrisierung, d.h. gegen den Uhrzeigersinn, parametrisiert sind:

a) $\int_{\partial B_R(1)} e^z z^n dz$, für $R > 0$ und $n \in \mathbb{N}$,

b) $\int_{\partial B_2(0)} \frac{1}{(z-1)(z-(1+4i))} dz$,

c) $\int_{\partial B_1(0)} \frac{\sin(z)}{z^4} dz$.

Lösung

- a) Die Funktion $e^z z^n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ holomorph auf $B_R(1)$ für alle $R > 0$. Mit dem Cauchy-Integralsatz ist also

$$\int_{\partial B_R(1)} f(z) dz = 0.$$

- b) Nur der Pol für $z = 1$ liegt im Inneren des Kreises. Es gilt

$$\text{Res}(f, 1) = \frac{\frac{1}{1-(1+4i)}}{1} = \frac{1}{-4i}.$$

Mit dem Residuensatz folgt dann

$$\int_{\partial B_2(0)} \frac{1}{(z-1)(z-(1+4i))} dz = \frac{2\pi i}{-4i} = -\frac{\pi}{2}.$$

- c) Das Residuum im Pol $z = 0$ errechnet sich mit der Darstellung $g(z) = \sin(z)$, $f(z) = \frac{g(z)}{z^4}$ durch

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{g^{(3)}(0)}{3!} = \frac{-\cos(0)}{6} = -\frac{1}{6}.$$

Mit dem Residuensatz folgt dann

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{\sin(z)}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{-6} = -\frac{\pi i}{3}.$$

Aufgabe 9 (Uneigentliches reelles Integral) [3 + 3 = 6 Punkte].

Ziel ist die Berechnung des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - e^{\frac{2}{3}\pi i})(x - (e^{\frac{2}{3}\pi i} - 4i))} dx.$$

Gehen Sie hierzu in den folgenden Schritten vor:

- Berechnen Sie die Residuen des gegebenen Integranden an allen Polstellen.
- Berechnen Sie das gesuchte Integral und begründen Sie Ihr Vorgehen.

Lösung

- a) Die Polstellen sind in

$$z_1 = e^{\frac{2}{3}\pi i}, \quad z_2 = e^{\frac{2}{3}\pi i} - 4i.$$

Wir berechnen die Residuen

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, e^{\frac{2}{3}\pi i}) &= \frac{1}{e^{\frac{2}{3}\pi i} - (e^{\frac{2}{3}\pi i} - 4i)} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}, \\ \text{Res}(f, e^{\frac{2}{3}\pi i} - 4i) &= \frac{1}{e^{\frac{2}{3}\pi i} - 4i - e^{\frac{2}{3}\pi i}} = \frac{1}{-4i} = \frac{i}{4}. \end{aligned}$$

- b) Da $\sup_{|z|=r, \Im(z) \geq 0} |zf(z)| \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$, bzw. $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomen p, q und $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$ können wir das uneigentliche reelle Integral mit dem Residuensatz berechnen.
Es ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1) \\ &= 2\pi i \frac{-i}{4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$