

Klausur Mathematik für Informatikstudiengänge 1

PD. Dr. A. Degeratu, PD. Dr. R. Häußling, M.Sc. M. Bitzer

09.03.2026

LÖSUNGEN

- **Füllen Sie bitte den Umschlagbogen aus und schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt, das Sie abgeben. Vergessen Sie bitte nicht Ihre Unterschrift!**
- **Erlaubte Hilfsmittel sind:**
Vier eigenhändig handbeschriebene doppelseitige DIN A4 Blätter.
- **Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.**

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. (9=3+3+3 Punkte) Geben Sie hier nur die Antworten zu den einzelnen Fragen an; Zwischenschritte oder Begründungen sind nicht erforderlich (und werden auch nicht bewertet).

- (a) Bestimmen Sie $r \in \{0, 1, \dots, 6\}$ mit $5^{375} \equiv r \pmod{7}$.
- (b) Bestimmen Sie $d := \text{ggT}(52, 44)$ sowie ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $d = 52a + 44b$.
- (c) Bestimmen Sie die Zahl n mit 5-adischer Entwicklung 21303_5 .

Aufgabe 2. (9=3+2+4 Punkte) Geben Sie hier nur die Antworten zu den einzelnen Fragen an; Zwischenschritte oder Begründungen sind nicht erforderlich (und werden auch nicht bewertet).

- (a) Sei $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ der Körper mit 5 Elementen. Bestimmen Sie $a, b, c \in K$, sodass das Polynom $f = X^3 + aX^2 + bX + c \in K[X]$ die Zahlen $\bar{0}, \bar{1}$ und $\bar{2}$ als Nullstellen besitzt.
- (b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|2x - 4| \leq 5$.
- (c) Gegeben seien $z := 3 - 2i \in \mathbb{C}$ und $w := 1 - i \in \mathbb{C}$. Schreiben Sie jeweils $z \cdot w$ und $\frac{z}{w}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. (10=4+3+3 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ der Körper mit 11 Elementen. Für $t \in K$ betrachte die Matrix

$$A_t := \begin{bmatrix} t + \bar{1} & \bar{3} & \bar{4}t \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & t & \bar{5} \end{bmatrix} \in M_3(K).$$

- (a) Berechnen Sie $\det(A_t)$, und zeigen Sie, dass die Determinante für $t = \bar{10}$ Null ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $A_{\bar{0}}$ invertierbar ist, und bestimmen Sie $A_{\bar{0}}^{-1} \in M_3(K)$.
- (c) Bestimmen Sie alle $t \in K$, für die A_t invertierbar ist.

Aufgabe 4. (10=6+4 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 5} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 28 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^3.$$

- (a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L = \{x \in \mathbb{Q}^5 \mid A \cdot x = b\}$.
- (b) Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums $L_0 = \{x \in \mathbb{Q}^5 \mid A \cdot x = 0_3\}$.

Aufgabe 5. (12=2+4+2+2+2 Punkte)

Gegeben seien die Matrix $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$ sowie die Spaltenvektoren

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{in } \mathbb{Q}^3.$$

- (a) Zeigen Sie, dass v_1 ein Eigenvektor von A ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.
- (b) Bestimmen Sie das Charakteristische Polynom χ_A und die Eigenwerte von A .
- (c) Ist die Menge $\{v_1, v_3, v_4\}$ eine Basis von $\mathbb{Q}^3$? (Begründen Sie Ihre Antwort.)
- (d) Liegt v_2 im Erzeugnis $\langle v_1, v_3 \rangle_{\mathbb{Q}}$? (Begründen Sie Ihre Antwort.)
- (e) Sei $U = \langle v_2, v_3, v_5 \rangle_{\mathbb{Q}}$. Bestimmen Sie $\dim U$.