

# Klausur Mathematik für Informatikstudiengänge 1

PD. Dr. A. Degeratu, PD. Dr. R. Häußling, M.Sc. M. Bitzer

09.03.2026

LÖSUNGEN

- **Füllen Sie bitte den Umschlagbogen aus und schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt, das Sie abgeben. Vergessen Sie bitte nicht Ihre Unterschrift!**
- **Erlaubte Hilfsmittel sind:**  
**Vier eigenhändig handbeschriebene doppelseitige DIN A4 Blätter.**
- **Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.**

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1.** (9=3+3+3 Punkte) Geben Sie hier nur die Antworten zu den einzelnen Fragen an; Zwischenschritte oder Begründungen sind nicht erforderlich (und werden auch nicht bewertet).

- (a) Bestimmen Sie  $r \in \{0, 1, \dots, 6\}$  mit  $5^{375} \equiv r \pmod{7}$ .
- (b) Bestimmen Sie  $d := \text{ggT}(52, 44)$  sowie ganze Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $d = 52a + 44b$ .
- (c) Bestimmen Sie die Zahl  $n$  mit 5-adischer Entwicklung  $21303_5$ .

*Lösung.*

- (a) Es gilt  $375 = 3 \times 125 = 3 \times 5^3$ , also

$$5^{375} = 5^{3 \times 125} = (5^3)^{125} \equiv_7 (-1)^{125} = -1.$$

Das richtige  $r$  ist also  $r = 6$ .

3 Punkte.

- (b) Mit dem euklidischen Algorithmus erhalten wir

$$52 = 1 \times 44 + 8$$

$$44 = 5 \times 8 + 2$$

$$8 = 2 \times 4 + 0$$

und deswegen  $d = 4$ . Diese Rechnung liefert

$$4 = 44 - 5 \times 8 = 44 - 5 \times (52 - 44) = (-5) \times 52 + 6 \times 44,$$

also  $a = -4$  und  $b = 6$ .

3 Punkte.

- (c) Es gilt  $5^2 = 25$ ,  $5^3 = 125$  und  $5^4 = 625$ . Deshalb gilt

$$n = 3 + 0 \times 5^1 + 3 \times 5^2 + 1 \times 5^3 + 2 \times 5^4 = 3 + 75 + 125 + 1250 = 1453.$$

3 Punkte.

**Aufgabe 2.** (9=3+2+4 Punkte) Geben Sie hier nur die Antworten zu den einzelnen Fragen an; Zwischenschritte oder Begründungen sind nicht erforderlich (und werden auch nicht bewertet).

- (a) Sei  $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  der Körper mit 5 Elementen. Bestimmen Sie  $a, b, c \in K$ , sodass das Polynom  $f = X^3 + aX^2 + bX + c \in K[X]$  die Zahlen  $\bar{0}, \bar{1}$  und  $\bar{2}$  als Nullstellen besitzt.
- (b) Bestimmen Sie alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|2x - 4| \leq 5$ .
- (c) Gegeben seien  $z := 3 - 2i \in \mathbb{C}$  und  $w := 1 - i \in \mathbb{C}$ . Schreiben Sie jeweils  $z \cdot w$  und  $\frac{z}{w}$  in der Form  $a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ .

*Lösung.*

- (a)  $f(\bar{0}) = \bar{0}$ . Deshalb,  $c = \bar{0}$ . Es ist  $f(\bar{1}) = \bar{0} \Rightarrow \bar{1} + a + b = \bar{0} \Rightarrow b = -a - \bar{1}$ . Es ist auch  $f(\bar{2}) = \bar{0} \Rightarrow \bar{8} + \bar{4}a + \bar{2}b = \bar{0} \iff \bar{4} + \bar{2}a + \bar{b} = \bar{0} \Rightarrow \bar{4} + \bar{2}a + (-a - \bar{1}) = \bar{0} \Rightarrow a = -\bar{3} = \bar{2}$ .  
Deshalb,  $b = -\bar{3} = \bar{2}$ . 3 Punkte.
- (b)  $|2x - 4| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq 2x - 4 \leq 5 \Rightarrow -1 \leq 2x \leq 9 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$ ,  
also  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}]$ . 2 Punkte.
- (c)  $z \cdot w = (3 - 2i)(1 - i) = 3 - 2i - 3i + 2i^2 = 1 - 5i$ . 2 Punkte.  
 $\frac{z}{w} = \frac{3 - 2i}{1 - i} = \frac{(3 - 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{5 + i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$ . 2 Punkte.

**Aufgabe 3.** (10=4+3+3 Punkte)

Sei  $K = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$  der Körper mit 11 Elementen. Für  $t \in K$  betrachte die Matrix

$$A_t := \begin{bmatrix} t + \bar{1} & \bar{3} & \bar{4}t \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & t & \bar{5} \end{bmatrix} \in M_3(K).$$

- (a) Berechnen Sie  $\det(A_t)$ , und zeigen Sie, dass die Determinante für  $t = \bar{10}$  Null ist.
- (b) Zeigen Sie, dass  $A_{\bar{0}}$  invertierbar ist, und bestimmen Sie  $A_{\bar{0}}^{-1} \in M_3(K)$ .
- (c) Bestimmen Sie alle  $t \in K$ , für die  $A_t$  invertierbar ist.

*Lösung.*

- (a) Es gilt  $\bar{10} = \overline{-1}$ .

1 Punkt.

$$\det(A_t) = (t + \bar{1}) \det \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ t & \bar{5} \end{bmatrix} - \bar{2} \det \begin{bmatrix} \bar{3} & \bar{4}t \\ t & \bar{5} \end{bmatrix} = (t + \bar{1})(\bar{5}) - \bar{2}(\bar{15} - \bar{4}t^2) = \bar{8}t^2 + \bar{5}t - \bar{25} = \bar{8}t^2 + \bar{5}t + \bar{8}.$$

2 Punkte.

Direkte Rechnung zeigt für  $t = \bar{10} = \overline{-1}$

$$\det(A_{\bar{10}}) = \det(A_{\overline{-1}}) = \bar{8} - \bar{5} + \bar{8} = \bar{11} = \bar{0}$$

in  $K$ .

1 Punkt.

- (b) Es gilt  $\det(A_0) = \bar{8} \neq \bar{0}$  in  $K$  und deshalb ist  $A_0$  invertierbar.

1 Punkt.

Mit dem Gauß-Verfahren erhalten wir (wir lassen die Querstriche weg)

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right] \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right].$$

1 Punkt.

Deswegen ist die Inverse durch

$$A_0^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{5} & \bar{0} \\ \bar{7} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{9} \end{bmatrix}$$

gegeben.

1 Punkt.

- (c) Über  $K$  kann  $\det(A_t)$  wie folgt geschrieben werden:

$$\det(A_t) = \bar{8}t^2 + \bar{5}t + \bar{8} = \bar{8}t^2 + \bar{16}t + \bar{8} = \bar{8}(t + \bar{1})^2.$$

1 Punkt.

Es gilt also  $\det(A_t) = 0$  nur dann, wenn  $t = \overline{-1} = \bar{10}$ . Die Matrix ist deswegen für alle  $t \neq \bar{10}$  invertierbar und ist für  $t = \bar{10}$  nicht invertierbar.

2 Punkte.

**Aufgabe 4.** (10=6+4 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 5} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 28 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^3.$$

- (a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $L = \{x \in \mathbb{Q}^5 \mid A \cdot x = b\}$ .  
 (b) Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums  $L_0 = \{x \in \mathbb{Q}^5 \mid A \cdot x = 0_3\}$ .

*Lösung.*

- (a) Mit dem Gauß-Verfahren erhalten wir

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Deshalb,  $L = \{(7 - 2s - 3t, s, 1, t, 2) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ .

- (b)
- $L_0 = \{(-2s - 3t, s, 0, t, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$
- .

Eine Basis ist  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$

3 Punkte.

3 Punkte.

2 Punkte.

2 Punkte.

**Aufgabe 5.** (12=2+4+2+2+2 Punkte)

Gegeben seien die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$  sowie die Spaltenvektoren

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{in } \mathbb{Q}^3.$$

- Zeigen Sie, dass  $v_1$  ein Eigenvektor von  $A$  ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.
- Bestimmen Sie das Charakteristische Polynom  $\chi_A$  und die Eigenwerte von  $A$ .
- Ist die Menge  $\{v_1, v_3, v_4\}$  eine Basis von  $\mathbb{Q}^3$ ? (Begründen Sie Ihre Antwort.)
- Liegt  $v_2$  im Erzeugnis  $\langle v_1, v_3 \rangle_{\mathbb{Q}}$ ? (Begründen Sie Ihre Antwort.)
- Sei  $U = \langle v_2, v_3, v_5 \rangle_{\mathbb{Q}}$ . Bestimmen Sie  $\dim U$ .

*Lösung.*

- $A \cdot v_1 = -v_1$  1 Punkt.  
und  $\lambda_1 = -1$ . 1 Punkt.
- 

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(A - XI_3) = (4 - X)(-1 - X)(-1 - X) - (1 - X)(-6) \\ &= -X^3 + 2X^2 + X - 2. \end{aligned}$$

1 Punkt.

Aus (a) wissen wir  $\lambda_1 = -1$ . 1 Punkt.  
Dann

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= -X^3 + 2X^2 + X - 2 \\ &= -X^3 - X^2 + 3X^2 + 3X - 2X - 2 \\ &= -X^2(X + 1) + 3X(X + 1) - 2(X + 1) \\ &= (X + 1)(-X^2 + 3X - 2) \\ &= -(X + 1)(X - 1)(X - 2) \end{aligned}$$

und die anderen zwei Eigenwerte sind  $\lambda_2 = 1$  und  $\lambda_3 = 2$ . 2 Punkte.

- Da  $\dim \mathbb{Q}^3 = 3$  muss eine Basis genau 3 linear unabhängigen Vektoren haben. 1 Punkt.

$$\text{Da } \det[v_1 v_3 v_4] = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -3, \text{ sind die drei Vektoren linear unabhängig } \implies$$

$\{v_1, v_3, v_4\} \subset \mathbb{Q}^3$  Basis. 1 Punkt.

- Wir haben  $\langle v_1, v_3 \rangle_{\mathbb{Q}} = \{sv_1 + tv_3 \mid s, t \in \mathbb{Q}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2s+t \\ 2s+t \\ 3s \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Q} \right\}$ . 1 Punkt.

Dann  $v_2 \in \langle v_1, v_3 \rangle_{\mathbb{Q}}$  genau dann, wenn  $s, t \in \mathbb{Q}$  mit  $2s + t = 0$ ,  $2s + t = 2$ ,  $3s = 2$  existieren.

Aber es existieren keine solchen  $s$  und  $t$ . Es folgt:  $v_2 \notin \langle v_1, v_3 \rangle_{\mathbb{Q}}$ . 1 Punkt.

- Das Tupel  $(v_3, v_5)$  ist linear unabhängig und  $v_2 = 2v_3 + 2v_5$ . 1 Punkt.

Also  $U = \langle v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{Q}}$  und  $\dim U = 2$ . 1 Punkt.