

Klausur Mathematik für Informatikstudiengänge 2

PD. Dr. A. Degeratu, PD. Dr. R. Häußling, M.Sc. M. Bitzer

23.03.2026

Lösungen

- Füllen Sie bitte den Umschlagbogen aus und schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt, das Sie abgeben. Vergessen Sie bitte nicht Ihre Unterschrift!
- Erlaubte Hilfsmittel sind:
Vier eigenhändig handbeschriebene doppelseitige DIN A4 Blätter.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. (10=5+2+3 Punkte) Thema: Folgen und Reihen

(a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (wenn diese existieren):

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(2n-4)^2}{n^2+1}, \quad (ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n+3^n}.$$

Hinweise für (ii): Schätzen Sie die Folge geschickt nach oben und unten ab.

(b) Bestimmen Sie

$$\left\{ a \in \mathbb{R} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(a)^n}{n!} \text{ existiert und ist endlich} \right\}.$$

(c) Ermitteln Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x)^n}{n^3}.$$

Lösung:

(a) Wir untersuchen die Folgen auf Konvergenz.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{(n+2)(2n-4)^2}{n^2+1} = \frac{(n+2)(4n^2-16n+16)}{n^2+1} = \frac{4n^3-8n^2-16n+32}{n^2+1} \\ &= \frac{4n}{1+\frac{1}{n^2}} - \frac{8}{1+\frac{1}{n^2}} - \frac{16}{n+\frac{1}{n}} + \frac{32}{n^2+1}. \end{aligned}$$

1 Punkt für Umformung.

Gemäß der Rechenregeln folgt, dass die letzten 3 Summanden konvergieren, während der erste Term divergiert. Also divergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. 1 Punkt für korrektes Ergebnis.

(ii) Sei $b_n := \sqrt[n]{2n+3^n}$. Es gilt

$$0 \leq b_n \leq \sqrt[n]{3^n+3^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3 \cdot \sqrt[n]{2}.$$

1 Punkt für Abschätzung.

Da die Funktion $x \rightarrow 2^x$ stetig ist, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 2^0 = 1.$$

1 Punkt für Argumentation des Grenzwerts. Ohne Begründung: 0.5 Pkt. Abzug.

Also haben wir eine obere Schranke für $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gefunden, die gegen 3 konvergiert. Andererseits gilt

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq b_n.$$

Also konvergiert die gegebene Folge gegen 3.

1 Punkt für korrektes Ergebnis.

(b) Die Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion lautet

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

1 Punkt für Erkennen der Exponentialfunktion.

Also konvergiert (für jedes $x \in \mathbb{R}$) die Folge

$$\left(\frac{x^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

gegen 0 und somit auch insbesondere für $x = \sin(a)$, $a \in \mathbb{R}$. Folglich ist die gesuchte Menge $\mathbb{R}$.

0.5 Punkt für $x = \sin(a)$ und 0.5 Punkt für korrektes Endergebnis.

(c) Wir definieren

$$a_n := (-1)^n \frac{3^n}{n^3}$$

und betrachten

$$q := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

1 Punkt für Verwendung der Formel.

Es gilt

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{3^n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 = 3 \cdot 1 = 3.$$

1 Punkt für korrekte Berechnung von q .

Somit ist der Konvergenzradius gegeben durch $R = \frac{1}{3}$.

1 Punkt für korrekten Konvergenzradius.

Aufgabe 2. (10=1+2+3+4 Punkte) Thema: Stetigkeit und Differenzierbarkeit
Sei $D := \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Auf D sei die Funktion f definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{1 + \cos(x)}$$

- (a) Begründen Sie, warum f auf D stetig ist.
- (b) Bestimmen Sie die erste Ableitung f' von f .
- (c) Berechnen Sie alle Extrempunkte von f sowie die Werte von f an den Extrempunkten.
- (d) Untersuchen Sie f auf Monotonie.

Lösung:

- (a) Zunächst ist Cosinus differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und somit auch auf D . Zudem ist f auf D wohldefiniert (da $\cos(x) \neq -1$ für alle $x \in D$) und folglich ist f auf D stetig.

1 Punkt für korrekte Argumentation.

- (b) Mit der Quotientenregel erhält man

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{(1 + \cos(x))^2}.$$

2 Punkte für korrekte Ableitung.

- (c) Die Extremstellen von f sind die Nullstellen von f' .

Diese sind genau die Nullstellen des Sinus, d.h. die Extremstellen sind gegeben durch

$$\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

1 Punkt für formal korrektes Aufschreiben der Extremstellen. Dies kann auch später direkt bei der Angabe der gesuchten Extrempunkte passieren. Wenn nur die Nullstellen von Sinus erwähnt werden, ohne diese explizit anzugeben: 0.5 Punkte.

Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$f(2k\pi) = \frac{1}{1 + \cos(2k\pi)} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

1 Punkt für Berechnung des Funktionswerts an den Extremstellen.

Somit sind die Extrempunkte von f gegeben durch

$$\left\{ \left(2k\pi, \frac{1}{2} \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1 Punkt für formal korrekte Angabe der Menge der Extrempunkte. Werden die Funktionswerte nicht angegeben: 0 Punkte und dafür 1 Punkt oben.

- (d) Das Monotonieverhalten von f lässt sich am Vorzeichen von f' ablesen. Da

$$(1 + \cos(x))^2 > 0$$

für alle $x \in D$, ist das Vorzeichen von f' stets identisch zum Vorzeichen des Sinus.

1 Punkt für Übertragen des Problems auf Vorzeichen von $\sin(x)$.

Also ist f streng monoton wachsend auf

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$$

und streng monoton fallend auf

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi).$$

Jeweils 1 Punkt für Angabe der Mengen und jeweils 0.5 Punkte für korrekte Angabe der Monotonie. Sollten die Mengen ungenau (aber nicht falsch) notiert sein: jeweils 0.5 Punkte Abzug.

Aufgabe 3. (10= (4+1)+(3+2) Punkte) Thema: Stammfunktionen und Integrale

- (a) Gegeben sei die Funktion $f(x) := \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 12}}$ für $x \in \mathbb{R}$.
- (i) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x)$.
 - (ii) Bestimmen Sie das Integral $\int_0^{\sqrt{2}} f(x) dx$.
- (b) Gegeben sei die rationale Funktion $g(x) := \frac{8x}{x^2 - 2x - 15}$.
- (i) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $g(x)$.
 - (ii) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $g(x)$.

Lösung:

- a) (i) Mit Substitutionregel (Kettenregel rückwärts).

Wir setzen: $\phi(x) = x^4 + 12 \Rightarrow \phi'(x) = 4x^3$ und

$$f(x) = \frac{1}{4} \phi'(x) \frac{1}{\sqrt{\phi(x)}} = \phi'(x) g(\phi(x))$$

mit $g(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}}$.

2 Punkte = 1 Punkt für die richtige Substitution und 1 Punkt für $g(x)$.

Eine Stammfunktion von $g(x)$ ist $G(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

1 Punkt.

Damit ist

$$F(x) = G(\phi(x)) = \frac{1}{2}\sqrt{x^4 + 12}$$

eine Stammfunktion von f .

1 Punkt.

- (ii) Da wir schon eine Stammfunktion haben, benutzen wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

$$\int_0^{\sqrt{2}} f(x) dx = \left[\frac{1}{2} \sqrt{x^4 + 12} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} (\sqrt{16} - \sqrt{12}) = \frac{1}{2} (4 - 2\sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}.$$

1 Punkt

- b) (i) Zunächst faktorisieren wir den Nenner:

$$x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$$

Deshalb:

$$\frac{8x}{(x - 5)(x + 3)} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 3}$$

1 Punkt

Multiplikation mit dem Hauptnenner $(x + 3)(x - 5)$ ergibt:

$$8x = A(x + 3) + B(x - 5) \Rightarrow 8x = Ax + 3A + Bx - 5B = (A + B)x + (3A - 5B)$$

Vergleich der Koeffizienten liefert das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} A + B = 8 \\ 3A - 5B = 0 \end{cases}$$

Lösen das System ergibt:

$$A = 8 - B \Rightarrow 3(8 - B) - 5B = 0 \Rightarrow 8B = 24 \Rightarrow B = 3 \Rightarrow A = 5$$

2 Punkte = 1 Punkt System + 1 Punkt die richtige Lösung

Deshalb: $\frac{8x}{(x-5)(x+3)} = \frac{5}{x-5} + \frac{3}{x+3}$.

(ii) Wir integrieren die Partialbruchzerlegung:

$$\int g(x) dx = \int \left(\frac{5}{x-5} + \frac{3}{x+3} \right) dx = 5 \ln |x-5| + 3 \ln |x+3|.$$

2 Punkte wenn alles richtig sind, 1 Punkt wenn eine richtig ist.

Nur 1 Punkt, wenn der Betrag fehlt.

Aufgabe 4. (10=2+4+1+3 Punkte) Thema: Partielle Ableitungen und lokale Extrema

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2$.

- (a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- (b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f sowie die Werte von f an diesen kritischen Punkten.
- (c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f .
- (d) Bestimmen Sie für jeden kritischen Punkt, ob dort ein lokales Minimum oder Maximum vorliegt, oder kein lokales Extremum.

Lösung:

- (a) Wir berechnen die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

2 Punkte

- (b) Die kritischen Punkte sind die Punkte, wo die beiden partiellen Ableitungen null sind:

$$3x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

$$2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

- Für $x = -1$: $y = 0 \rightarrow$ kritischer Punkt: $(-1, 0)$
- Für $x = 1$: $y = 0 \rightarrow$ kritischer Punkt: $(1, 0)$

Werte von f an diesen Punkten:

$$\begin{aligned} f(-1, 0) &= (-1)^3 - 3(-1) + 0 = -1 + 3 = 2 \\ f(1, 0) &= 1^3 - 3(1) + 0 = 1 - 3 = -2 \end{aligned}$$

4 Punkte = 2 Punkte für das Gleichungssystem + korrekte Lösung, 1 Punkt für alle kritischen Punkte, 1 Punkt für die Funktionswerte an jedem kritischen Punkt.

- (c) Die Hesse-Matrix ist:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1 Punkt

- (d) Einsetzen der kritischen Punkte in die Hesse-Matrix ergibt:

– Für $(-1, 0)$:

$$H_f(-1, 0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(H) = -6 \cdot 2 = -12 < 0$$

Kein lokales Extremum

– Für $(1, 0)$:

$$H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(H) = 6 \cdot 2 = 12 > 0, \quad \text{Spur} = 8 > 0$$

Lokales Minimum

3 Punkte: 1.5 Punkt für die Behandlung jedes kritischen Punktes.

Aufgabe 5. (5 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge von reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass der Grenzwert α der Folge eindeutig bestimmt ist.

Lösung:

Durch Widerspruch. Wir nehmen an: Es gibt zwei verschiedenen Grenzwerte $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ der Folge. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $\alpha < \alpha'$. 1 Punkt.

Sei $\epsilon = \frac{\alpha' - \alpha}{2} > 0$. 1 Punkt.

Da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergent mit Grenzwert α ist, $\exists n_1 \in \mathbb{N}_0$ mit

$$|a_n - \alpha| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_1.$$

Da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergent mit Grenzwert α' ist, $\exists n_2 \in \mathbb{N}_0$ mit

$$|a_n - \alpha'| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_2.$$

1 Punkt.

Für alle $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ gilt dann:

$$a_n < \alpha + \epsilon = \alpha + \frac{\alpha' - \alpha}{2} = \frac{\alpha + \alpha'}{2}$$

und

$$a_n > \alpha' - \epsilon = \alpha' - \frac{\alpha' - \alpha}{2} = \frac{\alpha + \alpha'}{2}.$$

1 Punkt.

Widerspruch! Also ist unsere Annahme $\alpha \neq \alpha'$ falsch, und es gilt $\alpha = \alpha'$. 1 Punkt.