

Klausur Mathematik für Informatikstudiengänge 1 im WiSe 2024/2025

PD. Dr. A. Degeratu, Dr. E. Chavli, M.Sc. O.König
09.09.2025

- Füllen Sie bitte den Umschlagbogen aus und schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt, das Sie abgeben. Vergessen Sie bitte nicht Ihre Unterschrift!
- Erlaubte Hilfsmittel sind:
Vier eigenhändig handbeschriebene doppelseitige DIN A4 Blätter.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. (9=3+3+3 Punkte) Geben Sie hier nur die Antworten zu den einzelnen Fragen an; Zwischenschritte oder Begründungen sind nicht erforderlich (und werden auch nicht bewertet).

- (a) Bestimmen Sie $r \in \{0, 1, \dots, 10\}$ mit $3^{2025} \equiv r \pmod{11}$.
- (b) Bestimmen Sie $d := \text{ggT}(42, 66)$ sowie ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $d = 42a + 66b$.
- (c) Bestimmen Sie die Zahl n mit 4-adischer Entwicklung 133221_4 .

Aufgabe 2. (9=3+3+3 Punkte) Geben Sie hier nur die Antworten zu den einzelnen Fragen an; Zwischenschritte oder Begründungen sind nicht erforderlich (und werden auch nicht bewertet).

- (a) Sei $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ der Körper mit 7 Elementen. Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms $f = X^3 + 5X^2 + \bar{6}X + \bar{2} \in K[X]$.
- (b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|1 - 2x| \leq 9$.
- (c) Gegeben seien $z := 2 - i \in \mathbb{C}$ und $w := 3 + 2i \in \mathbb{C}$. Schreiben Sie jeweils $2z \cdot w$ und $5z^{-1} + w$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. (10=4+3+3 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ der Körper mit 5 Elementen. Für $t \in K$ betrachte die Matrix

$$A_t := \begin{bmatrix} t + \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{2}t & t + \bar{1} \end{bmatrix} \in M_3(K).$$

- (a) Berechnen Sie $\det(A_t)$ und zeigen Sie, dass die Determinante für $t = \bar{2}$ Null ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $A_{\bar{1}}$ invertierbar ist, und bestimmen Sie $A_{\bar{1}}^{-1} \in M_3(K)$.
- (c) Bestimmen Sie alle $t \in K$, für die A_t invertierbar ist.

Aufgabe 4. (8=4+4 Punkte) Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 5} \text{ und } b = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^3.$$

- (a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L = \{x \in \mathbb{Q}^5 \mid A \cdot x = b\}$.
- (b) Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums $L_0 = \{x \in \mathbb{Q}^5 \mid A \cdot x = 0_3\}$.

Aufgabe 5. (12=2+4+2+2+2 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$ sowie die Spaltenvektoren

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{in } \mathbb{Q}^3.$$

- (a) Zeigen Sie, dass v_1 ein Eigenvektor von A ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.
- (b) Bestimmen Sie das Charakteristische Polynom χ_A und die Eigenwerte von A .
- (c) Ist die Menge $\{v_3, v_4\}$ eine Basis von $\mathbb{Q}^3$? (Begründen Sie Ihre Antwort.)
- (d) Liegt v_4 im Erzeugnis $\langle v_1, v_3 \rangle_{\mathbb{Q}}$? (Begründen Sie Ihre Antwort.)
- (e) Sei $U = \langle v_2, v_3, v_5 \rangle_{\mathbb{Q}}$. Bestimmen Sie $\dim U$.