

Klausur Mathematik für Informatikstudiengänge 2 im SoSe 2025

PD. Dr. A. Degeratu, Dr. E. Chavli, M.Sc. O. König,
28.08.2025

- Füllen Sie bitte den Umschlagbogen aus und schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt, das Sie abgeben. Vergessen Sie bitte nicht Ihre Unterschrift!
- Erlaubte Hilfsmittel sind:
Vier eigenhändig handbeschriebene doppelseitige DIN A4 Blätter.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. (10= 4+3+3 Punkte) Thema: Folgen und Reihen

(a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (wenn diese existieren):

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sqrt{n}}{(\sqrt{n} + 1)^2} \qquad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}\right)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Bestimmen Sie

$$\left\{ a \in \mathbb{R}, a \geq 0 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \frac{a}{n}\right)^n \text{ existiert und ist endlich} \right\}.$$

(c) Berechnen Sie den Wert von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(a)^n}{n!}$$

für beliebiges $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. (10= 1+2+3+4 Punkte) Thema: Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Gegeben ist die Funktion $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

für alle $x \in (0, \pi)$.

- (a) Begründen Sie, warum f stetig ist.
- (b) Bestimmen Sie die erste Ableitung f' von f auf $(0, \pi)$.
- (c) Untersuchen Sie f auf Monotonie.
- (d) Sei f^{-1} die Umkehrfunktion von f . Ermitteln Sie die erste Ableitung von f^{-1} .

Aufgabe 3. (10= (4+1)+(3+2) Punkte) Thema: Stammfunktionen und Integrale

- (a) Gegeben sei die Funktion $f(x) := (2x - 1) \exp(x^2 - x + 1)$ für $x \in \mathbb{R}$.
 - (i) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x)$.
 - (ii) Bestimmen Sie das Integral $\int_0^1 f(x) dx$.
- (b) Gegeben sei die rationale Funktion $g(x) := \frac{3x + 23}{x^2 - x - 12}$.
 - (i) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $g(x)$.
 - (ii) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $g(x)$.

Aufgabe 4. (10= 2+4+1+3 Punkte) Thema: Partielle Ableitungen und lokale Extrema

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

- (a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- (b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f , sowie die Werte von f an diesen kritischen Punkten.
- (c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f .
- (d) Bestimmen Sie für jeden kritischen Punkt, ob dort ein lokales Minimum oder Maximum vorliegt, oder kein lokales Extremum.

Aufgabe 5. (5 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine bestimmt divergente Folge gegen $+\infty$ mit $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $(\frac{1}{a_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Null-Folge ist.