

Klausur Mathematik für Informatikstudiengänge 2 im SoSe 2025

PD. Dr. A. Degeratu, Dr. E. Chavli, M.Sc. O. König,

28.08.2025

Lösungen

- Füllen Sie bitte den Umschlagbogen aus und schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt, das Sie abgeben. Vergessen Sie bitte nicht Ihre Unterschrift!
- Erlaubte Hilfsmittel sind:
Vier eigenhändig handbeschriebene doppelseitige DIN A4 Blätter.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. (10= 4+3+3 Punkte) Thema: Folgen und Reihen

(a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (wenn diese existieren):

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sqrt{n}}{(\sqrt{n} + 1)^2} \qquad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}\right)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Bestimmen Sie

$$\left\{ a \in \mathbb{R}, a \geq 0 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \frac{a}{n}\right)^n \text{ existiert und ist endlich} \right\}.$$

(c) Berechnen Sie den Wert von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(a)^n}{n!}$$

für beliebiges $a \in \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Wir prüfen die Folgen auf Konvergenz.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{2n - \sqrt{n}}{(\sqrt{n} + 1)^2} = \frac{2n - \sqrt{n}}{n + 2\sqrt{n} + 1} = \frac{2n}{n + 2\sqrt{n} + 1} - \frac{\sqrt{n}}{n + 2\sqrt{n} + 1} \\ &= \frac{2}{1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n} + 2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}. \end{aligned}$$

1 Punkt für korrekte Umformung.

Aus Lemma 27.17 folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

und somit folgt aus den Rechenregeln aus Satz 27.8

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$$

1 Punkt für korrektes Ergebnis.

(ii) Sei

$$b_n := \frac{\sin^2\left(\frac{1}{n^2+\sqrt{n}}\right)}{n}.$$

Es gilt

$$\sin^2(x) \in [0, 1]$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit ist

$$0 \leq b_n \leq \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

1 Punkt für korrekte Abschätzung.

Mit Satz 27.6 folgt somit

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

und somit ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

1 Punkt für korrektes Ergebnis.

(b) Es gilt

$$\left(a + \frac{a}{n}\right)^n = a^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Betrachte a^n für $n \in \mathbb{N}$: Für $a < 1$ ist dieser Ausdruck konvergent (Beispiel 27.7). Somit folgt aus Satz 27.8, dass die gegebene Folge für $|a| < 1$ konvergiert. Im Fall $a = 1$ konvergiert die gegebene Folge gegen die Euler'sche Zahl (Beispiel 27.14). Ist $a > 1$, so divergiert die Folge, denn: Die Folge

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ist nach unten gegen 1 beschränkt und somit ist

$$a^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq a^n$$

und a^n divergiert für $a > 1$ (siehe bspw. Probeklausur). Somit ist die gesuchte Menge $[0, 1]$.

1 Punkt für jeden Fall.

(c) Gemäß Satz 30.5 erkennen wir die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion ausgewertet an der Stelle $\sin(a)$. Also lautet der gesuchte Wert

$$\exp(\sin(a)).$$

2 Punkte für das Erkennen der Potenzreihenentwicklung,

1 Punkte für das korrekte Ergebnis.

Aufgabe 2. (10= 1+2+3+4 Punkte) Thema: Stetigkeit und Differenzierbarkeit
Gegeben ist die Funktion $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

für alle $x \in (0, \pi)$.

- (a) Begründen Sie, warum f stetig ist.
- (b) Bestimmen Sie die erste Ableitung f' von f auf $(0, \pi)$.
- (c) Untersuchen Sie f auf Monotonie.
- (d) Sei f^{-1} die Umkehrfunktion von f . Ermitteln Sie die erste Ableitung von f^{-1} .

Lösung:

- (a) Zunächst sind Sinus und Cosinus stetig auf $\mathbb{R}$ und somit auch auf $(0, \pi)$. Zudem ist f auf $(0, \pi)$ wohldefiniert (da $\sin(x) \neq 0$ für alle $x \in (0, \pi)$) und folglich ist f auf $(0, \pi)$ stetig (Satz 32.5).

0.5 Punkte für Argumentation über Quotienten + 0.5 Punkte für Prüfen, dass der Nenner nicht verschwindet.

- (b) Mit der Quotientenregel (Satz 32.7) erhält man

$$f'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

wobei wir im letzten Schritt die Identität $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ verwendet haben (vgl. Beispiel 32.14).

2 Punkte für korrekte Ableitung. Vereinfachung im letzten Schritt wird nicht verlangt.

- (c) Für alle $x \in (0, \pi)$ gilt

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} < 0.$$

Folglich ist die Funktion f auf $(0, \pi)$ streng monoton fallend.

2 Punkte für Prüfen der Ableitung, 1 Punkt für korrekte Folgerung.

- (d) Da die Funktion f streng monoton fallend ist, ist f injektiv. Zudem ist $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (0, \pi)$.

Jeweils 0.5 Punkte für Prüfen der Kriterien von Satz 33.3.

Weiter können wir f' schreiben als

$$f'(x) = -1 - \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -(1 + f^2(x)).$$

1 Punkt für Umschreiben von f' .

Mittels Satz 33.3 erhalten wir daher

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{1 + f^2(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

2 Punkte für Anwendung des Satzes.

Aufgabe 3. (10= (4+1)+(3+2) Punkte) Thema: Stammfunktionen und Integrale

- (a) Gegeben sei die Funktion $f(x) := (2x - 1) \exp(x^2 - x + 1)$ für $x \in \mathbb{R}$.
 (i) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x)$.
 (ii) Bestimmen Sie das Integral $\int_0^1 f(x) dx$.
 (b) Gegeben sei die rationale Funktion $g(x) := \frac{3x + 23}{x^2 - x - 12}$.
 (i) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $g(x)$.
 (ii) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $g(x)$.

Lösung:

- (a) (i) Mit Substitutionregel (Kettenregel rückwärts”).

Wir setzen: $\phi(x) = x^2 - x + 1 \Rightarrow \phi'(x) = (2x - 1)$ und

$$f(x) = \phi'(x) \exp(\phi(x)) = \phi'(x) g(\phi(x))$$

mit $g(x) = \exp(x)$.

2 Punkte = 1 Punkt für die richtige Substitution und 1 Punkt für $g(x)$.

Eine Stammfunktion von $g(x)$ ist $G(x) = \exp(x)$.

1 Punkt.

Damit ist

$$F(x) = G(\phi(x)) = \exp(x^2 - x + 1)$$

eine Stammfunktion von f .

1 Punkt.

- (ii) Da wir schon eine Stammfunktion haben, benutzen wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

$$\int_0^1 f(x) dx = [\exp(x^2 - x + 1)]_0^1 = \exp(1^2 - 1 + 1) - \exp(0^2 - 0 + 1) = \exp(1) - \exp(1) = 0.$$

1 Punkt

- (b) (i) Zunächst faktorisieren wir den Nenner:

$$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$$

Deshalb:

$$\frac{3x + 23}{(x - 4)(x + 3)} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x + 3}$$

1 Punkt

Multiplikation mit dem Hauptnenner $(x + 3)(x - 4)$ ergibt:

$$3x + 23 = A(x + 3) + B(x - 4) \Rightarrow 3x + 23 = Ax + 3A + Bx - 4B = (A + B)x + (3A - 4B)$$

Vergleich der Koeffizienten liefert das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ 3A - 4B = 23 \end{cases}$$

Lösen das System ergibt:

$$A = 3 - B \Rightarrow 3(3 - B) - 4B = 23 \Rightarrow 9 - 3B - 4B = 23 \Rightarrow -7B = 14 \Rightarrow B = -2 \Rightarrow A = 5$$

2 Punkte=1 Punkt System+1 Punkt die richtige Lösung

$$\text{Deshalb: } \frac{3x + 23}{(x - 4)(x + 3)} = \frac{5}{x - 4} - \frac{2}{x + 3}.$$

(ii) Wir integrieren die Partialbruchzerlegung:

$$\int g(x) dx = \int \left(\frac{5}{x-4} - \frac{2}{x+3} \right) dx = 5 \ln |x-4| - 2 \ln |x+3| + C$$

2 Punkte wenn alles richtig sind, 1 Punkt wenn eine richtig ist.

Nur 1 Punkt wenn es kein Betrag gibt.

Aufgabe 4. (10= 2+4+1+3 Punkte) Thema: Partielle Ableitungen und lokale Extrema

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

- (a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- (b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f , sowie die Werte von f an diesen kritischen Punkten.
- (c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f .
- (d) Bestimmen Sie für jeden kritischen Punkt, ob dort ein lokales Minimum oder Maximum vorliegt, oder kein lokales Extremum.

Lösung:

- (a) Wir berechnen die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4x$$

2 Punkte

- (b) Die kritischen Punkte sind die Punkte, wo die beiden partiellen Ableitungen null sind:

$$4x^3 - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = y \quad (1)$$

$$4y^3 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad y^3 = x \quad (2)$$

Eingesetzt $y = x^3$ in (2): $x^9 = x \Rightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 1, \quad x = -1$.

- Für $x = 0$: $y = x^3 = 0 \rightarrow$ kritischer Punkt: $(0, 0)$
- Für $x = 1$: $y = x^3 = 1 \rightarrow$ kritischer Punkt: $(1, 1)$
- Für $x = -1$: $y = (-1)^3 = -1 \rightarrow$ kritischer Punkt: $(-1, -1)$

Werte von f an diesen Punkten:

$$f(0, 0) = 0 + 0 - 0 + 1 = 1, \quad f(1, 1) = 1 + 1 - 4 + 1 = -1, \quad f(-1, -1) = 1 + 1 - 4 + 1 = -1$$

4 Punkte = 2 Punkte für korrektes Gleichungssystem + Lösung, 1 Punkt für alle kritische Punkte, 1 Punkt für Funktionswerte

- (c) Die Hesse-Matrix ist:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

1 Punkt

- (d) Einsetzen der kritischen Punkte in die Hesse-Matrix ergibt:
- Für $(0, 0)$:

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(H) = 0 - (-4)^2 = -16 < 0$$

Kein lokales Extremum

– Für $(1, 1)$:

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}, \quad \det(H) = 144 - 16 = 128 > 0, \quad \text{Spur} = 24 > 0$$

Lokales Minimum

– Für $(-1, -1)$:

$$H_f(-1, -1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}, \quad \det(H) = 144 - 16 = 128 > 0, \quad \text{Spur} = 24 > 0$$

Lokales Minimum

3 Punkte: 1 Punkt für die Behandlung jedes kritischen Punktes.

Aufgabe 5. (5 Punkte) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine bestimmt divergente Folge gegen $+\infty$ mit $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $(\frac{1}{a_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Null-Folge ist.

Lösung: Da $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist, ist $(\frac{1}{a_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von reellen Zahlen. 1 Punkt.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. 1 Punkt.

Sei dann $C = \frac{1}{\epsilon} > 0$. Da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine bestimmt divergente Folge gegen $+\infty$ ist, $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $a_n > C = \frac{1}{\epsilon} > 0$ für alle $n \geq n_0$. 1 Punkt.

Also es gilt

$$0 < \frac{1}{a_n} < \epsilon \quad \text{for all } n \geq n_0.$$

1 Punkt.

Da $\epsilon > 0$ beliebig $\implies (\frac{1}{a_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Null-Folge. 1 Punkt.